

**Relativistische Beschreibung endlicher,
gebundener Fermionensysteme**

von

Rolf Brockmann

aus

Bonn



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546228_0113

Relativistische Beschreibung endlicher, gebundener Fermionensysteme

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Rolf Brockmann

aus

Bonn

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fachbereichen der Universität Erlangen - Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung:

9. 2. 1977

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. E. Schweizer

Erstberichterstatter:

Professor Dr. M.G. Huber

Zweitberichterstatter:

Professor Dr. J. Ladik

Drittberichterstatter:

Professor Dr. W. Weise

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Einleitung	1
II. Allgemeine Prinzipien der Quantenfeldtheorie	4
II.1 Schwingers Wirkungsprinzip	5
II.2 Folgerungen aus Schwingers Wirkungsprinzip	11
II.2.1 Feldgleichungen	14
II.2.2 Quantisierungsregeln	15
II.2.3 Erhaltungssätze	19
III. Relativistische Formulierung des Vielteilchen- problems für Fermionen	24
III.1 Der Hamilton-Operator für Atomkerne, die aus punktförmigen Nukleonen bestehen	27
III.2 Der Hamilton-Operator für Atomkerne, deren Bausteine ausgedehnte Nukleonen sind	38
IV. Hartree-Fock für Atomkerne mit abgeschlossenen Schalen	44
IV.1 Erwartungswert des Hamilton-Operators	45
IV.2 Das Variationsverfahren	59
V. Numerische Lösungen der Hartree-Gleichungen	68
V.1 Wahl der Startwellenfunktionen	69
V.1.1 "Woods-Saxon-Viererspinoren"	69
V.1.2 "Oszillator-Viererspinoren"	77
V.2 Numerische Lösung der Hartree-Gleichungen	82
V.3 Resultate der Hartree-Rechnungen	85
VI. Zusammenhang des Hartree-Modells von Kapitel IV mit J.D.Waleckas Theorie der stark kondensierten Materie	106

VII. Zusammenfassung und Ausblick	109
Anhang A: Notation	112
Anhang B: Berechnung des retardierten Propagators der Klein-Gordon-Gleichung im Ortsraum	113
Anhang C: Zur Berechnung des Hamilton-Operators	115
Anhang D: Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen für den $\mathfrak{S}$ -Mesonenfeldoperator im Falle ausgedehnter Nukleonen	118
Anhang E: Zur Berechnung des Hamilton-Operators für ausgedehnte Nukleonen	120
Anhang F: Berechnung des Erwartungswertes der kine- tischen Energie	123
Anhang G: Zur Berechnung des Erwartungswertes des $\mathfrak{S}$ -Mesonen-Austauschpotentials	125
Literaturverzeichnis	127

I. Einleitung

Im Rahmen der Quantenfeldtheorie wird in dieser Arbeit ein endliches, gebundenes Fermionensystem relativistisch beschrieben. Die Wechselwirkung zwischen den Fermionen soll durch den Austausch von Bosonen vermittelt werden. Im Falle der elektromagnetischen Wechselwirkung werden zwischen den Fermionen bekanntlich γ -Quanten ausgetauscht. Unter Vernachlässigung der Retardierung verwendet man relativistische γ -Quanten-Austauschpotentiale erfolgreich zur Berechnung von Eigenschaften der Elektronen in der Atomhülle ungefähr seit 1960. Eine Übersicht über die Resultate dieser Rechnungen findet man in dem Artikel: "Relativistic Calculation of Atomic Structures" von I.P. Grant (Gra 70).

Die starke Wechselwirkung wird durch den Austausch von Mesonen bewirkt. Zur Beschreibung der Nukleon-Nukleon-Streuung sind die Ein-Boson-Austausch-Potentiale (OBEP) sehr erfolgreich. In letzter Zeit wurden zur Berechnung der Nukleon-Nukleon-Streuung auch relativistische Ein-Boson-Austausch-Potentiale verwendet, die keine freien Parameter mehr enthalten und die Streuphasen gut reproduzieren. Eine sehr gute Übersicht über die Situation in der Nukleon-Nukleon-Streuung findet man in dem Artikel in Physics Reports von K. Erkelenz (Erk 74). Während für das Zwei-Nukleonen-System und nuclear matter relativ viele Rechnungen mit den relativistischen Meson-Austausch-Potentialen durchgeführt wurden, gibt es nur wenige Arbeiten, die für endliche Atomkerne relativistische oder nichtrelativistische Mesonen-Austausch-Potentiale ver-

wenden. Deshalb wird nun in dieser Arbeit der Hamilton-Operator für endlich viele, gebundene Nukleonen (Atomkerne) relativistisch formuliert, wobei zwischen den Fermionen exemplarisch nur die Kernkräfte durch Mesonenaustausch wirken. Dieser relativistische Hamilton-Operator soll in der Hartree-Fock- bzw Hartree-Näherung gelöst werden, um relativistische Einteilchenwellenfunktionen und -energien zu erhalten. Es fragt sich dann, inwieweit sich diese relativistischen Einteilchenfunktionen und -energien von den nichtrelativistisch berechneten unterscheiden. Auf diese Weise läßt sich ein Beitrag leisten zu der Frage, ob in der Niederenergie-Kernphysik eine relativistische Beschreibung der Nukleonen relevant ist. Die relativistischen Einteilchenwellenfunktionen und -energien sind außerdem notwendig, um Prozesse der Mittelenergiephysik relativistisch beschreiben zu können. M.Dillig und R.Brockmann (Bro 76) konnten am Beispiel der Reaktion (p, π^+) zeigen, daß relativistische Effekte bei typischen Mittelenergieprozessen wichtig sein können. Dazu haben wir die Pion-Produktion an der Schwelle in einem einfachen Ein-Nukleon-Modell betrachtet und haben dann den pseudoskalaren- π N-Wechselwirkungsoperator und vierkomponentige Wellenfunktionen zur Beschreibung des Projektils und der gebundenen Nukleonen benutzt. Der differentielle Wirkungsquerschnitt zeigte in diesem Modell erhebliche Unterschiede gegenüber einer rein nichtrelativistischen Rechnung, die auf der Galilei-invarianten- π N-Wechselwirkung basierte. Um den relativistischen Hamilton-Operator aufstellen zu können, werden in Kapitel II die Grundlagen der Feldtheorie behandelt, die im folgenden benötigt werden. Man kann sie in

vielen Lehrbüchern finden (Bjo 67, Bog 59, Rom 69, Schw 70). Deshalb ist die Darstellung in Kapitel II knapp gehalten. In Kapitel III wird der feldtheoretische Hamilton-Operator zunächst für punktförmige Nukleonen aufgestellt. Dieses Modell wird dann durch Einführung von Formfaktoren auf ausgedehnte Nukleonen erweitert.

Die Hartree-Fock-Gleichungen des relativistischen Hamilton-Operators von Kapitel III für Atomkerne mit abgeschlossenen Schalen werden in Kapitel IV aufgestellt. Dazu wird zunächst der Erwartungswert des Hamilton-Operators berechnet. Dann wird der Erwartungswert variiert, und man erhält die Hartree-Fock bzw Hartree-Gleichungen.

Kapitel V beschreibt das numerische Verfahren zur Lösung der Hartree-Gleichungen. Dies Verfahren ist so allgemein, daß man mit ihm auch die Hartree-Fock-Gleichungen lösen kann.

In Kapitel V werden außerdem die Ergebnisse der Hartree-Rechnungen diskutiert. Es wird hier auch auf den Zusammenhang unserer Arbeit, zu den Arbeiten von L.D. Miller (Mil 72, Mil 72a) eingegangen, die nach unserem Wissen die einzigen Arbeiten sind, die Mesonen-Austausch-Potentiale zur Berechnung von Eigenschaften endlicher Atomkerne benutzen.

Der Zusammenhang zwischen unserem Hartree-Modell und J.D. Waleckas Modell der stark kondensierten Materie wird in Kapitel VI diskutiert. (Wal 74).

Kapitel VII enthält eine Zusammenfassung dieser Arbeit und einen Ausblick.

II. Allgemeine Prinzipien der Quantenfeldtheorie

Es gibt im wesentlichen zwei verschiedene Wege, die Quantenfeldtheorie zu formulieren. Der erste Weg beruht auf dem quantenmechanischen Wirkungsprinzip; und der Lagrange-Formalismus spielt eine zentrale Rolle in dieser Theorie. Dieser Zugang ist insbesondere von J. Schwinger ausführlich diskutiert worden, so daß man auch von "Schwingers Quantenfeldtheorie" spricht (Schw 53). Der zweite Weg, die Quantenfeldtheorie zu formulieren, verzichtet vollkommen auf den Lagrange-Formalismus und beruht auf axiomatischer Grundlage. Man nennt diese Theorie deshalb auch die "axiomatische Quantenfeldtheorie". Diesen Zugang haben vor allem Lehmann, Symanzik und Zimmermann (Leh 55) bzw Wightman (Wi 63) diskutiert, und man spricht vom LSZ - bzw Wightman-Formalismus. Im folgenden wird die Quantenfeldtheorie im Rahmen der Variationsmethode von Schwinger formuliert, da diese Methode verständlicher ist als ein rein axiomatisches Vorgehen.

II. 1 Schwingers Wirkungsprinzip

Gegeben seien A Feldoperatoren $\psi_\alpha \quad \alpha = 1, \dots, A$.

Diese beschreiben im allgemeinen Fall A miteinander wechselwirkende Felder. Sie können aber auch freie Felder darstellen.

Im Schrödinger-Bild sind diese Feldoperatoren, die den Ortsoperatoren der gewöhnlichen Quantenmechanik entsprechen, nur Funktionen des Ortes:

$$\psi_\alpha^S = \psi_\alpha^S(\underline{x}) \quad \alpha = 1, \dots, A \quad (2.1)$$

Dagegen sind im Heisenberg-Bild die Feldoperatoren ψ_α Funktionen der Orts- und Zeitkoordinaten

$$\psi_\alpha^H = \psi_\alpha^H(x) = \psi_\alpha^H(\underline{x}, t) \quad \alpha = 1, \dots, A \text{ und } x = (\underline{x}, t) \quad (2.2)$$

Das ist der Vorteil der Heisenberg-Darstellung, denn diese gleichwertige Behandlung der Orts- und Zeitkoordinaten erlaubt, einen explizit Lorentz - kovarianten Formalismus zu entwickeln. Allein in der Angabe von Anfangsbedingungen und, wie wir später sehen werden, Kommutatorbeziehungen, z.B. für die Zeit $t = 0$, liegt eine gewisse Auszeichnung der Zeitkoordinaten. "Zu einer Zeit t " ist eine nicht kovariant formulierte Aussage der Theorie. Aber auch diese kann durch den kovarianten Begriff der raumartigen Fläche (Abb.1), auf der die Anfangs- und Kommutatorbedingungen anzugeben sind, ersetzt werden.

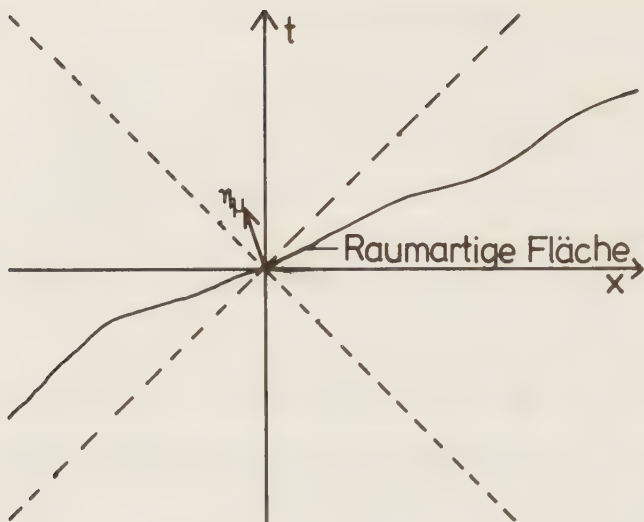


Abb.1: Darstellung einer raumartigen Fläche. Die Normalen n_μ einer raumartigen Fläche sind zeitartig.

Eine raumartige Fläche ist eine dreidimensionale Fläche σ , deren Normale n_μ überall zeitartig ist, das heißt $n_\mu n^\mu > 0$. Nach Konvention wählen wir n^μ immer auf dem Vorwärtslichtkegel, d.h. $n^0 > 0$. Besonders einfache raumartige Flächen sind eben und genügen der Gleichung.

$$n_\mu x^\mu - \tau = 0 \quad (2.3)$$

n_μ sei ein konstanter (x - unabhängiger), zeitartiger Einheitsvektor: $n_\mu n^\mu = 1$. n_μ ist der Normalenvektor der Fläche. τ ist ein konstanter Skalar, der den "Abstand" der ebenen Fläche vom Ursprung angibt. Ein Spezialfall der

Fläche (2.3) ist eine zeitlich konstante Hyperfläche, die aus der Menge der Punkte x besteht, für die $x^0 = t = \text{const}$ gilt. In diesem Fall ist $\eta^0 = 1, \eta^k = 0$ ($k=1,2,3$) und $\tau = t$. Wenn wir jedoch mittels einer Lorentz-Transformation in ein anderes Koordinatensystem übergehen, verlieren wir diese speziellen Eigenschaften, und in dem neuen Koordinatensystem gilt die allgemeine Gleichung (2.3). In Zukunft werden die Ausdrücke "zu einer gegebenen Zeit" und "auf einer raumartigen Fläche" synonym gebraucht; auf diese Weise können die Anfangsbedingungen und Kommutatorbeziehungen kovariant formuliert werden.

Es soll im folgenden dieses Kapitels Schwingers Variationsmethode und seine Auswirkungen diskutiert werden.

Hierzu definieren wir einen Wirkungsoperator für die Feldoperatoren φ_a :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_3}^{x_4} \int_{x_5}^{x_6} \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a) d^4x = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a) \quad (2.4)$$

Die funktionale Form des Lagrange-Dichteoperators wird in der gleichen Weise wie bei den entsprechenden klassischen Feldsystemen gewählt. Für das freie Pionenfeld erhält man dann zum Beispiel folgenden Lagrange-Dichteoperator

$$\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^0} - m_\pi^2 \varphi^2(x) \right) \quad (2.5)$$

Wir nehmen natürlich an, daß die Felder $\varphi_a(x) = \varphi_a(x, t)$, wie in der klassischen Theorie, für $x \rightarrow \infty$ schnell genug gegen Null gehen.

Nun soll das gleiche System von einem infinitesimal benachbarten Koordinatensystem aus betrachtet werden. Dann gilt

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu \equiv x^\mu + \delta x^\mu \quad (2.6a)$$

$$\gamma_\alpha(x) \rightarrow \gamma'_\alpha(x) \equiv \gamma_\alpha(x) + \delta_\alpha \gamma_\alpha(x) \quad (2.6b)$$

Die totale Variation $\delta_\alpha \gamma$ der Felder ist definiert durch

$$\delta_\alpha \gamma_\alpha(x) = \gamma'_\alpha(x) - \gamma_\alpha(x) \quad (2.7)$$

Es ist wichtig zu bemerken, daß $\gamma'_\alpha(x)$ von $\gamma_\alpha(x)$ in zweierlei Hinsicht differiert.

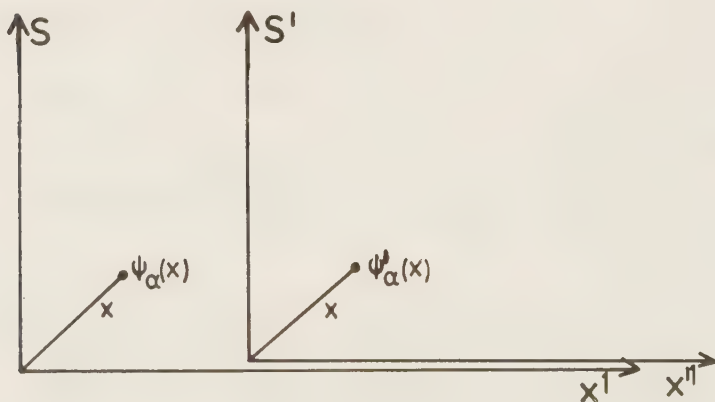


Abb. 2: Totale Variation eines Feldes $\gamma_\alpha(x)$.

Erstens: Das Feld wird von einem neuen Koordinatensystem beschrieben, so daß x in dem Argument von $\gamma'_\alpha(x)$ nicht derselbe geometrische Punkt wie in dem Argument von $\gamma_\alpha(x)$ ist: x ist der Punkt in dem neuen Koordinatensystem, der denselben numerischen Wert für die Koordinaten hat wie der

Punkt x in dem alten Koordinatensystem hatte. Zweitens: Das Feld selbst ändert sich im allgemeinen beim Übergang von einem Koordinatensystem zum anderen; d.h. für einen Punkt im Raum, der von S bzw S' die Koordinaten x bzw x' hat, muß im allgemeinen nicht $\gamma_\alpha(x)$ gleich $\gamma'_\alpha(x')$ sein. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn S' aus S durch eine infinitesimale Lorentz-Transformation hervorgeht.

Es sei an dieser Stelle an folgendes Resultat der Quantenmechanik erinnert: Eine unitäre Transformation wird durch einen Hermiteschen Operator erzeugt (Mes 67, Rom 65). Wenn also $\Omega(t)$ irgendein Operator zur Zeit t ist, dann ist seine Änderung unter einer infinitesimalen, kanonischen (unitären) Transformation gegeben durch den Kommutator:

$$\delta \Omega(t) = i [F(t), \Omega(t)] \quad (2.8)$$

wobei $F(t)$, der Erzeuger der kanonischen Transformation, ein Hermitescher Operator ist, der im allgemeinen von t abhängt. Wir kehren nun zu unserem Problem zurück und können sagen, daß die infinitesimale, kanonische Transformation (2.6a und 2.6b) durch einen Erzeuger $F(t)$ dargestellt werden kann. Deshalb kann man die infinitesimale Änderung $\delta \gamma_\alpha$ der Feldoperatoren folgendermaßen schreiben:

$$\delta \gamma_\alpha(x, t) = i [F(t), \gamma_\alpha(x, t)] \quad (2.9)$$

Andererseits bewirkt die kanonische Transformation im allgemeinen eine nichtverschwindende Änderung δW in dem Wirkungsoperator (2.4), $W \rightarrow W + \delta W$. Schwinger setzt nun diese Änderung

δW der Differenz des Erzeugers zur Zeit t_1 bzw t_2 gleich:

$$\text{Schwinger: } \delta W = F(t_2) - F(t_1) \quad (2.10)$$

Dies ist Schwingers fundamentales Postulat.

Man kann beweisen (Rom 65), daß die Beziehung (2.10) für ein klassisches Punktsystem gilt. Deshalb ist es naheliegend, (2.10) für quantenmechanische Systeme zu postulieren. Aus diesem Grund hat Schwinger (2.10) als Axiom der Quantenfeldtheorie eingeführt.

Wir werden im folgenden sehen, daß dies einzige Postulat sowohl die Bewegungsgleichungen als auch die mögliche Form der Quantisierungsregeln festlegt. Weiterhin erlaubt es auch die Herleitung von Erhaltungssätzen.

II. 2 Folgerungen aus Schwingers Wirkungsprinzip

Der erste (und nichttriviale!) Schluß, den wir aus dem Postulat (2.10) ziehen, ist, daß der Lagrange-Operator hermitesch ist, weil der Erzeuger F hermitesch ist. Um weitere Schlüsse aus (2.10) ziehen zu können, müssen wir zuerst die explizite Form von δW herleiten. Die allgemeine Variation von W ist gegeben durch

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\psi + \delta\psi, \partial_\mu \psi + \delta_\mu \partial_\mu \psi) - \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) \quad (2.11)$$

Wegen (2.6a) haben sich auch die Zeiten t_1 und t_2 geändert. Wir führen die Jacobi-Determinante ein:

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

Vernachlässigt man in der Funktional-Determinante (2.12)

Glieder zweiter Ordnung, so ergibt sich

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)} = 1 + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu$$

Nun wird der Integrand des ersten Termes in Gleichung

(2.11) nach Taylor entwickelt:

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\mathcal{L}(\gamma_\alpha, \partial_\mu \gamma_\alpha) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\alpha} \delta_0 \gamma_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \gamma_\alpha} \delta_0 \partial_\mu \gamma_\alpha \right] \times \\ \times (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) - \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\gamma_\alpha, \partial_\mu \gamma_\alpha) \quad (2.13)$$

Verwendet man die Definition der Totalen Variation eines Feldes $\gamma_\alpha(x)$ (2.7), so kann man leicht zeigen, daß

$$\delta_0 \partial_\mu \gamma_\alpha = \partial_\mu \delta_0 \gamma_\alpha \quad (2.14)$$

ist. Unter Verwendung von (2.14) ergibt sich für δW :

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\alpha} \delta_0 \gamma_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \gamma_\alpha} \partial_\mu \delta_0 \gamma_\alpha + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu \right) \quad (2.15)$$

In dem letzten Term kann man $\mathcal{L}$ unter das Differentiations-symbol schreiben, weil $\mathcal{L}$ nicht explizit von den Koordinaten abhängt. In dem zweiten Term führen wir eine partielle Differentiation aus und erhalten

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \gamma_\alpha} \right) \delta_0 \gamma_\alpha + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \gamma_\alpha} \delta_0 \gamma_\alpha + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \right\} \quad (2.16)$$

Wir wollen uns zunächst auf den zweiten Term von Gleichung (2.16) konzentrieren. Mit Hilfe des Gaußschen Satzes ergibt sich:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \delta_0 \varphi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) = \quad (2.17)$$

$$= \int_{t=t_1} \mathcal{T} d^3x - \int_{t=t_2} \mathcal{T} d^3x$$

mit $\mathcal{T} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi_a} \delta_0 \varphi_a + \mathcal{L} \delta x^0$ (2.17a)

Es ist vorteilhaft die lokale Variation einzuführen:

$$\delta \varphi_a \equiv \varphi'_a(x') - \varphi_a(x) \quad (2.18)$$

x und x' beziehen sich auf denselben geometrischen Raumpunkt. Mit der Taylor-Entwicklung des Ausdruckes $\varphi'_a(x')$ erhält man:

$$\delta \varphi_a \equiv \varphi'_a(x) + \partial_\nu \varphi'_a(x) \delta x^\nu - \varphi_a(x) = \delta_0 \varphi_a(x) + \partial_\nu \varphi'_a(x) \delta x^\nu \quad (2.19)$$

Behält man nur Terme erster Ordnung bei, so erhält man aus (2.19) unter Berücksichtigung von (2.6b)

$$\delta \varphi_a = \delta_0 \varphi_a(x) + \partial_\nu \varphi_a(x) \delta x^\nu \quad (2.20)$$

Mit den Gleichungen (2.20) und (2.17) ergibt sich für (2.16):

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \right) \delta_0 \varphi_a + F(t_2) - F(t_1) \quad (2.21)$$

$$F(t) \equiv \int_{x_0=t} \{ \pi_a \delta \varphi_a - (\pi_a \partial_\nu \varphi_a - \delta_\nu^0 \mathcal{L}) \delta x^\nu \} d^3x \quad (2.21a)$$

$$\pi_a(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi_a(x)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a} \quad (2.21b)$$

δ_ν^0 ist das Kronecker-Symbol (s. Anhang A)

$\pi_\alpha(x)$ nennt man auch das kanonisch konjugierte Feld des Feldes $\gamma_\alpha(x)$. Jetzt sind wir vorbereitet, um Schlüsse aus Schwingers Postulat (2.10) ziehen zu können.

II. 2.1 Feldgleichungen

Gemäß (2.10) muß die Variation von W gleich der Differenz von zwei zeitabhängigen Funktionen sein. Andererseits ist die explizite Form von W durch (2.21) gegeben. Damit sich die Gleichungen (2.10) und (2.21) nicht widersprechen, muß das Integral in Gleichung (2.21) verschwinden

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \gamma_\alpha} \right) \delta_0 \gamma_\alpha = 0 \quad (2.22a)$$

Da nun das Integrationsgebiet des Integrals als auch $\delta_0 \gamma_\alpha$ beliebig gewählt werden können, führt (2.22 a) auf folgende Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \gamma_\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (2.22b)$$

Diese Differentialgleichungen sind genau die bekannten Euler-Lagrange-Gleichungen. Deshalb ist unser erstes Ergebnis, daß die Feldgleichungen für die Operatoren γ_α durch das Hamiltonsche Prinzip gegeben sind, d.h. sie

haben dieselbe Form wie in der klassischen Theorie.

Wegen (2.22b) wird aus Gleichung (2.21)

$$\delta W = F(t_2) - F(t_1)$$

Deshalb ist $F(t)$, gegeben durch Gleichung (2.21a), nach Schwingers Postulat der Erzeuger der kanonischen Transformation (2.6).

II. 2.2 Quantisierungsregeln

Wir wollen nun eine besonders einfache Klasse von kanonischen Transformationen betrachten, nämlich jene, für die $\delta x^\mu = 0$ ist. Dann gilt nach (2.20)

$$\delta \gamma_\alpha(x) = \delta_0 \gamma_\alpha(x)$$

Für den Erzeuger (2.21a) ergibt sich

$$F(t) = \int_{x^0=t} \pi_\alpha \delta \gamma_\alpha d^3x$$

Dieser Erzeuger bestimmt die Änderung der Operatoren gemäß Gleichung (2.8). Insbesondere gilt:

$$\delta \gamma_\rho(t, \underline{x}) = i \int [\pi_\alpha(t, \underline{x}') \delta \gamma_\alpha, \gamma_\rho(t, \underline{x})] d^3x' \quad (2.23a)$$

$$\delta \pi_\alpha(t, \underline{x}) = i \int [\pi_\alpha(t, \underline{x}') \delta \gamma_\alpha, \pi_\beta(t, \underline{x})] d^3 x' \quad (2.23b)$$

Wir wollen diese Identitäten lösen. Dazu benutzen wir folgende Kommutatorrelation

$$[AB, C] \equiv [A, C]B + A[B, C] \quad (2.24)$$

(2.23a) läßt sich dazu mit (2.24) umschreiben

$$\delta \gamma_\beta(t, \underline{x}) = i \int d^3 x' \left\{ [\pi_\alpha(t, \underline{x}'), \gamma_\beta(t, \underline{x})] \delta \gamma_\alpha + \pi_\alpha(t, \underline{x}') [\delta \gamma_\alpha(t, \underline{x}'), \gamma_\beta(t, \underline{x})] \right\}$$

Die einfachste Art, diese Identität zu erfüllen, erhält man, wenn man verlangt:

$$[\pi_\alpha(t, \underline{x}'), \gamma_\beta(t, \underline{x})] = -i \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\underline{x} - \underline{x}') \quad (2.25a)$$

und

$$[\delta \gamma_\alpha(t, \underline{x}'), \gamma_\beta(t, \underline{x})] = 0 \quad (2.25b)$$

Da α und β willkürlich sind, impliziert die letzte Gleichung:

$$0 = [\delta \gamma_\alpha(t, \underline{x}'), \gamma_\beta(t, \underline{x})] + [\gamma_\alpha(t, \underline{x}'), \delta \gamma_\beta(t, \underline{x})] \equiv \delta [\gamma_\alpha(t, \underline{x}'), \gamma_\beta(t, \underline{x})] \quad (2.26a)$$

Da (2.26a) für beliebige Variationen und beliebige Feldkomponenten gilt, erhalten wir

$$[\gamma_\alpha(t, \underline{x}), \gamma_\beta(t, \underline{x}')] = 0 \quad (2.26)$$

In analoger Weise erhält man aus (2.23b) die zusätzliche Relation

$$[\pi_\alpha(t, \underline{x}), \pi_\beta(t, \underline{x}')] = 0 \quad (2.27)$$

(2.25a), (2.26) und (2.27) sind die bekannten Kommutatorrelationen. Man schreibt sie oft auch in folgender Weise:

$$[\pi_\alpha(x), \psi_\beta(x')] \delta(x_0 - x'_0) = -i \delta_{\alpha\beta} \delta(x - x') \quad (2.28a)$$

$$[\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')] \delta(x_0 - x'_0) = 0 \quad (2.28b)$$

$$[\pi_\alpha(x), \pi_\beta(x')] \delta(x_0 - x'_0) = 0 \quad (2.28c)$$

Es gibt jedoch eine genauso einfache, jedoch grundlegend verschiedene Algebra, die die Gleichungen (2.23a) und (2.23b) löst. Um sie zu erhalten, muß man anstelle der Relation (2.24) die folgende Relation verwenden:

$$[AB, C] = A\{C, B\} - \{C, A\}B \quad (2.29)$$

Hierbei ist $\{A, B\} = AB + BA$ der Antikommutator.

Dazu erhalten wir, ähnlich wie oben, die folgenden Antikommutatorrelationen

$$\{\pi_\alpha(t, \underline{x}), \psi_\beta(t, \underline{x}')\} = i \delta_{\alpha\beta} \delta(\underline{x} - \underline{x}') \quad (2.30a)$$

$$\{\psi_\alpha(t, \underline{x}), \psi_\beta(t, \underline{x}')\} = 0 \quad (2.30b)$$

$$\{\pi_\alpha(t, \underline{x}), \pi_\beta(t, \underline{x}')\} = 0 \quad (2.30c)$$

Diese lassen sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\{ \pi_\alpha(x), \psi_\beta(x') \} \delta(x_0 - x'_0) = i \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\underline{x} - \underline{x}') \quad (2.31a)$$

$$\{ \psi_\alpha(x), \psi_\beta(x') \} \delta(x_0 - x'_0) = 0 \quad (2.31b)$$

$$\{ \pi_\alpha(x), \pi_\beta(x') \} \delta(x_0 - x'_0) = 0 \quad (2.31c)$$

Es erhebt sich nun die Frage: Wann muß man die Kommutator- und wann die Antikommutator-Relationen verwenden? Die Antwort auf diese wichtige Frage gab Pauli mit seinem berühmten Spin-Statistik-Theorem: Für Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem Spin) muß man die Kommutator-Relationen verwenden, während man für Fermionen (Teilchen mit halbzahligem Spin) die Antikommutator-Relationen verwenden muß. Durch (2.30) bzw (2.31) ist das Pauli-Prinzip in die Theorie integriert.

Es sei hier noch einmal bemerkt, daß die Quantisierungsregeln sowohl für freie als auch für wechselwirkende Felder gleichfalls gelten. Dies ist offensichtlich, weil nirgendwo in der Formulierung von Schwingers Variationsprinzip die spezielle Struktur des Lagrange-Operators eingeht. Dieser Sachverhalt geht entscheidend in das Folgende dieser Arbeit ein!

II. 2.3 Erhaltungssätze

Es sollen jetzt kanonische Transformationen betrachtet werden, unter denen der Wirkungsoperator W unverändert bleibt. Solche Transformationen nennt man auch Symmetrietransformationen. Symmetrietransformationen ändern die Gestalt der Bewegungsgleichungen nicht. Da $\delta W = 0$ gilt, folgt aus Schwingers Postulat (2.10)

$$F(t_1) = F(t_2) \quad (2.32)$$

Da t_1 und t_2 zwei beliebige Zeitpunkte sind, impliziert (2.32)

$$\frac{dF(t)}{dt} = 0$$

Das heißt aber, daß die Erzeugende $F(t)$ einer Symmetrietransformation eine Konstante der Bewegung ist.

Wir wollen nun verlangen, daß die Naturgesetze unter Poincaré-Transformationen invariant sind. Poincaré-Transformationen sind solche Transformationen, für die

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu + b^\mu$$

gilt, wobei b^μ beliebige reelle Zahlen sind, und die reellen Zahlen a^μ_ν folgenden Orthogonalitätsrelationen genügen

$$a^\mu_\nu a^\nu_\lambda = \delta^\mu_\lambda$$

Die Menge aller Poincaré-Transformationen bildet eine zehnparametrische Gruppe. Die Poincaré-Gruppe enthält als Untergruppen die sechseparametrische Lorentz-Gruppe, definiert durch

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$$

und die vierparametrische Translationsgruppe

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + b^\mu$$

Wenn nun die Naturgesetze unter Poincaré-Transformationen invariant sein sollen, so verlangen wir insbesondere, daß der Wirkungsoperator unverändert bleibt, $\delta W = 0$, wenn wir die infinitesimale Transformation

$$x^\nu \rightarrow x'^\nu = x^\nu + \varepsilon^\nu \quad \text{mit} \quad \varepsilon^\nu = \delta x^\nu = \text{const.} \quad (2.33)$$

ausführen, d.h., wenn wir das System von einem infinitesimal verschobenen Koordinatensystem beschreiben. Dann gilt:

$$\gamma'_\alpha(x) = \gamma_\alpha(x - \varepsilon) \quad (2.34)$$

Für die totale Variation ergibt sich dann mit (2.7)

$$\begin{aligned} \delta_0 \gamma_\alpha &= \gamma_\alpha(x - \varepsilon) - \gamma_\alpha(x) = \\ &= \gamma_\alpha(x) - \partial_\nu \gamma_\alpha(x) \varepsilon^\nu - \gamma_\alpha(x) = \\ &= - \partial_\nu \gamma_\alpha(x) \varepsilon^\nu \end{aligned} \quad (2.35)$$

Mit (2.19) folgt für die lokale Variation

$$\delta \gamma_\alpha = \delta_0 \gamma_\alpha(x) + \partial_\nu \gamma_\alpha(x) \delta x^\nu = 0 \quad (2.36)$$

Folglich ist der Erzeuger der infinitesimalen Transformation (2.33) nach (2.21a):

$$\begin{aligned}
 F(t) &= -\epsilon^\nu \int_{x_0=t} (\pi_\alpha \partial_\nu \psi_\alpha - \delta_\nu^\sigma \mathcal{L}) d^3x = \\
 &= -\epsilon^\nu \int_{x_0=t} T^\sigma_\nu(x) d^3x
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\text{Mit } T^\sigma_\nu(x) = \pi_\alpha \partial_\nu \psi_\alpha - \delta_\nu^\sigma \mathcal{L} \tag{2.38}$$

Da wir nun Invarianz unter der Translations-Gruppe verlangen, ist der Erzeuger (2.37) zeitunabhängig, und weil weiterhin ϵ^ν beliebig ist, haben wir vier Erhaltungssätze:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0=t} T^\sigma_\nu d^3x = 0 \quad \nu=0,1,2,3 \tag{2.39}$$

Insbesondere nennen wir

$$T_{00} = T^{00} = \pi_\alpha(x) \partial_0 \psi_\alpha(x) - \mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{H}(x) \tag{2.40}$$

die Energiedichte des Feldsystems am Punkt x . Ähnlich wird

$$T^{0k} = -T_{0k} = -\pi_\alpha(x) \partial_k \psi_\alpha(x) \tag{2.41}$$

die Impulsdichte des Feldsystems genannt. Diese Bezeichnungswiese wurde analog zu den entsprechenden mechanischen Begriffen gewählt. Zum Beispiel ist $\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L$ die Hamilton- oder Energiefunktion des zu (2.40) analogem klassischen Punktsystems.

Als nächstes wollen wir den Energie-Impuls-Vierervektor für

ein Feldsystem definieren:

$$P^\nu \equiv \int_{x_0=t} T^{\nu 0}(x) d^3x \quad (2.42)$$

Dann ist

$$P^0 = P_0 = \int T^{00} d^3x = \int \mathcal{H}(x) d^3x = H \quad (2.43)$$

die totale Feldenergie. Die vier Erhaltungssätze (2.39) haben mit (2.42) folgende Gestalt

$$\frac{dP^\nu}{dt} = 0 \quad (2.44)$$

Insgesamt kann man sagen, daß Energie- und Impulserhaltung des Feldsystems aus der Invarianz des Systems unter Translation folgen.

Nach (2.37) und (2.42) ist

$$F = -\epsilon^\nu P_\nu \quad (2.45)$$

der Erzeuger der kanonischen Transformation (2.33), welche nach (2.35) folgende Änderung der Feldoperatoren bewirkt

$$\delta_0 \psi_\alpha = -\partial_\nu \psi_\alpha \epsilon^\nu \quad (2.46)$$

Unter Verwendung der Relation (2.8) ergibt sich

$$-\partial_\nu \psi_\alpha \epsilon^\nu = -i\epsilon^\nu [P_\nu, \psi_\alpha] \quad (2.47)$$

Da ϵ_ν beliebig ist, folgt schließlich

$$\partial_\nu \psi_\alpha = i [P_\nu, \psi_\alpha] \quad (2.48)$$

(2.48) zeigt uns, daß die P_ν Translationsoperatoren sind. Unter Verwendung derselben Argumente, die zu (2.48) führten, erhält man für einen allgemeinen Operator $\Omega(x)$

$$\partial_\nu \Omega(x) = i [P_\nu, \Omega(x)] \quad (2.49)$$

(2.48) bzw (2.49) sind die dynamischen Bewegungsgleichungen in der Heisenberg-Darstellung. Setzt man insbesondere in (2.48) $\nu = 0$, so bekommt man

$$\partial_0 \psi_\alpha = i [P_0, \psi_\alpha(x)] = i [H, \psi_\alpha(x)] \quad (2.50)$$

die bekannten Heisenberg-Gleichungen für die zeitliche Änderung von Operatoren.

Da wir schon dynamische Bewegungsgleichungen in Form der Euler-Lagrange-Feldgleichungen haben, fragt es sich, ob die Heisenberg-Gleichungen (2.48) oder (2.50) mit den Euler-Lagrange-Feldgleichungen verträglich sind. Hier zeigt sich der große Vorteil von Schwingers Wirkungsprinzip:

Da die Euler-Lagrange-Feldgleichungen, die Quantisierungsregeln, die Heisenberg-Gleichungen und sogar die Erhaltungssätze alle aus Schwingers Wirkungsprinzip folgen, sind diese Größen selbstverständlich miteinander verträglich.

III. Relativistische Formulierung des Vielteilchenproblems für Fermionen

In diesem Kapitel wird im Rahmen von Schwingers Quantenfeldtheorie das Vielteilchensystem relativistisch formuliert. Dabei gehen wir von der Annahme aus, daß die Kräfte zwischen den Fermionen durch den Austausch von Bosonen zustandekommen. Wenn zwischen den Fermionen elektromagnetische Kräfte wirken, dann ist es eine bekannte Tatsache, daß zwischen den Fermionen Photonen ausgetauscht werden. Im Falle der starken Wechselwirkung hat Yukawa (YU 35) die Hypothese aufgestellt, daß die Kernkräfte durch den Austausch von π -Mesonen zustandekommen. Im Laufe der Zeit hat sich herausgestellt, daß zwischen den Nukleonen nicht nur eine Mesonenart (π -Mesonen), sondern mehrere Mesonenarten ausgetauscht werden. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Mesonen sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Meson	T	J^P	Masse (MeV)	Kopplungskonstanten
π	1	0^-	138.7	$\frac{g_{\pi}^2}{4\pi} = 14.5 \pm 0.5$
σ	0	0^+	550.	$\frac{g_{\sigma}^2}{4\pi} = 6. \pm 1.$
ρ	1	1^-	763.	$\frac{g_{\rho}^2}{4\pi} = 0.5 \pm 0.2$
ω	0	1^-	782.8	$\frac{g_{\omega}^2}{4\pi} = 10. \pm 2.$

Tabelle 1: Physikalische Eigenschaften der Mesonen, die zwischen den Nukleonen ausgetauscht werden.

γ , ρ und ω sind experimentell bekannte Mesonen. Die angegebenen physikalischen Größen sind die experimentellen Werte. Das σ -Meson ist ein fiktives Teilchen, das den $\pi\pi$ -Austausch simuliert. In der Tabelle sind die Werte angegeben, die man für die physikalischen Größen des σ -Mesons benötigt, um die Nukleon-Nukleon-Streuphasen reproduzieren zu können; und es zeigt sich, daß man mit diesen vier Mesonen, die Nukleon-Nukleon-Streuung sehr gut reproduzieren kann (Bro 71, Ver 74). In neueren Theorien (Jac 75) der Nukleon-Nukleon-Streuung hat man das σ - und ρ -Meson eliminiert. Man nimmt anstelle des σ -Mesons den 2π -Austausch im $J^P = 0^+$ und $T = 0$ Kanal, der das σ -Meson simuliert, explizit mit. Anstelle des ρ -Mesons, das eine sehr große Breite (152 ± 3 MeV) (Par 76) hat, nimmt man den 2π -Austausch im $J^P = 1^-$ und $T = 1$ Kanal, der das ρ -Meson simuliert, explizit mit. Das ω -Meson, das im $J^P = 1^-$ und $T = 0$ Kanal den 3π -Austausch simuliert, hat eine kleine Breite (10 ± 0.4 MeV) (Par 76), so daß man hier ruhig mit dem ω -Meson rechnen kann. Auf diese Weiterentwicklung der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wird in dieser Arbeit noch nicht eingegangen. In der vorliegenden Arbeit wurde angenommen, daß die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung durch den Austausch der Mesonen von Tabelle 1 zustandekommt.

Während also bei der elektromagnetischen und starken Wechselwirkung die ausgetauschten Bosonen bekannt sind, ist dies bei der schwachen Wechselwirkung nicht der Fall. Um nämlich die Prozesse der schwachen Wechselwirkung durch Bosonenaustausch verstehen zu können, benötigt man ein sehr schweres Boson. Seine Ruhemasse sollte größer sein als $1500 m_e$ und seine Lebens-

dauer kürzer als 10^{-17} sec. Man nennt dieses Teilchen "intermediäres Boson". Es konnte noch nicht experimentell nachgewiesen werden.

In diesem Kapitel wird nun das Vielteilchenproblem für Fermionen relativistisch formuliert, wobei zwischen den Fermionen exemplarisch nur die Kernkräfte wirken sollen.

III. 1. Der Hamilton-Operator für Atomkerne, die aus punktförmigen Nukleonen bestehen.

Wir wollen nun den Hamilton-Operator für einen Atomkern aufstellen, der aus A Nukleonen besteht. Zwischen den Nukleonen sollen π -, σ -, ρ -, ω - Mesonen ausgetauscht werden. Vernachlässigt man die Wechselwirkung der Mesonen untereinander, so erhält man folgende Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N^{\text{free}} + \mathcal{L}_\pi^{\text{free}} + \mathcal{L}_\rho^{\text{free}} + \mathcal{L}_\sigma^{\text{free}} + \mathcal{L}_\omega^{\text{free}} + \mathcal{L}_{NN\pi}^{\text{int}} + \mathcal{L}_{NN\pi}^{\text{int}} + \mathcal{L}_{NN\sigma}^{\text{int}} + \mathcal{L}_{NN\rho}^{\text{int}} + \mathcal{L}_{NN\omega}^{\text{int}} \quad (3.1)$$

Hierbei sind $\mathcal{L}^{\text{free}}$ die freien Lagrange-Dichten:

$$\mathcal{L}_N^{\text{free}} = -\frac{1}{2} \bar{\psi}(x) \left[(-i \gamma^\mu \partial_\mu + M) + (i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu + M) \right] \psi(x) \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L}_\sigma^{\text{free}} = -\frac{1}{2} (m_\sigma^2 \phi^2(x) - \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x)) \quad (3.3)$$

$$\mathcal{L}_\pi^{\text{free}} = -\frac{1}{2} (m_\pi^2 \vec{\phi}^2(x) - \partial_\mu \vec{\phi}(x) \partial^\mu \vec{\phi}(x)) \quad (3.4)$$

$$\mathcal{L}_\rho^{\text{free}} = -\frac{1}{4} \vec{G}_{\mu\nu}(x) \vec{G}^{\mu\nu}(x) + m_\rho^2 \vec{\chi}_\nu(x) \vec{\chi}^\nu(x) \quad (3.5a)$$

$$\vec{G}_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu \vec{\chi}_\nu(x) - \partial_\nu \vec{\chi}_\mu(x) \quad (3.5b)$$

$$\mathcal{L}_\omega^{\text{free}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + m_\omega^2 \lambda_\nu(x) \lambda^\nu(x) \quad (3.6a)$$

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu \lambda_\nu(x) - \partial_\nu \lambda_\mu(x) \quad (3.6b)$$

$M, m_\pi, m_\eta, m_\rho, m_\omega$ sind die Ruhmassen der Nukleonen und der π -, η -, ρ -, ω -Mesonen. $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ sind Viererspinoroperatoren. $\psi(x), \vec{\phi}(x), \vec{\chi}^\nu(x), \lambda^\nu(x)$ sind die π -, η -, ρ - und ω -Mesonenfeldoperatoren. Die Pfeile über den η - und ρ -Mesonenfeldoperatoren deuten an, daß diese Feldoperatoren Vektoren im Isospinraum sind, da η - und ρ -Meson den Isospin $T = 1$ haben (s. Tabelle 1). Die Pfeile über den ∂_μ -Operatoren zeigen an, ob die Operatoren nach rechts oder nach links wirken.

$\mathcal{L}^{int}$ sind die bekannten Lagrange-Dichten der Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_{NN\pi}^{int} = g_\pi \bar{\psi}(x) \psi(x) \psi(x) \quad (3.7)$$

$$\mathcal{L}_{NN\eta}^{int} = i g_\eta \bar{\psi}(x) \vec{\phi}(x) \cdot \vec{\tau} \gamma_5 \psi(x) \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L}_{NN\rho}^{int} = -g_\rho \bar{\psi}(x) \vec{\chi}^\nu(x) \cdot \vec{\tau} \gamma_\nu \psi(x) \quad (3.9)$$

$$\mathcal{L}_{NN\omega}^{int} = -g_\omega \bar{\psi}(x) \lambda^\nu(x) \gamma_\nu \psi(x) \quad (3.10)$$

$\vec{\tau}$ sind die Pauli-Isospinmatrizen. Zur Notation der γ -Matrizen und der Pauli-Matrizen siehe Anhang A.

Es wird nur direkte Kopplung und keine Ableitungskopplung verwendet. Die Lagrange-Dichten (3.7) bis (3.10) sind lokal, d.h. die Feldoperatoren der Nukleonen und Mesonen beziehen sich auf dieselben Raum-Zeit-Punkte x . Wir idealisieren also die Nukleonen und Mesonen durch punktförmige

Teilchen. Weiterhin beachte man die Reihenfolge der Operatoren! Die Nukleonenfeldoperatoren sind nämlich nicht vertauschbar mit den Mesonenoperatoren, was wir später sehen werden. Eine weitere wichtige Eigenschaft der Lagrange-Dichten (3.2) bis (3.10) ist ihre Hermitizität. Dann ist natürlich auch die Lagrange-Dichte (3.1) hermitesch. Dies ist notwendig, da ja aus Schwingers Wirkungsprinzip folgte, daß die Lagrange-Dichte hermitesch sein muß.

Nun wollen wir aus der Lagrange-Dichte (3.1) den Hamilton-Operator im Nukleonenraum bestimmen. Dazu muß man die Mesonenfelder aus der Lagrange-Dichte eliminieren. Dies soll im folgenden vorgeführt werden. Zuerst variieren wir $\mathcal{L}$ nach $\bar{\psi}$ bzw. $\partial_\mu \bar{\psi}$ und erhalten als Euler-Lagrange-Gleichung die Dirac-Gleichung mit einem Quellterm

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + M) \psi(x) = g_r \psi(x) \psi(x) + i g_\pi \vec{\phi}(x) \vec{\nabla}_5 \psi(x) + g_\rho \vec{\chi}(x) \vec{\tau} \cdot \gamma_\nu \psi(x) - g_\omega \lambda^\nu(x) \gamma_\nu \psi(x) \quad (3.11)$$

Variation von $\mathcal{L}$ nach ψ und $\partial_\mu \psi$ liefert die zu (3.11) adjungierte Dirac-Gleichung

$$\bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + M) = g_r \bar{\psi}(x) \psi(x) + i g_\pi \bar{\psi}(x) \vec{\phi}(x) \vec{\tau} \cdot \gamma_5 + g_\rho \bar{\psi}(x) \vec{\chi}(x) \vec{\tau} \cdot \gamma_\nu - g_\omega \bar{\psi}(x) \lambda^\nu(x) \gamma_\nu \quad (3.12)$$

Multipliziert man Gleichung (3.11) von links mit $(-\bar{\psi}(x))$ und Gleichung (3.12) von rechts mit $\psi(x)$ und addiert die entstehenden Gleichungen, so ergibt sich die Kontinuitätsgleichung für den "Nukleonenstrom".

$$\partial_{\mu} (\bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \psi(x)) = 0 \quad (3.13)$$

Variation von $\mathcal{L}$ nach ψ bzw $\partial_{\mu} \psi$ liefert als Lagrange-Gleichung die Klein-Gord6n-Gleichung mit einem Quellterm

$$[\square + m^2] \psi(x) = g_f \bar{\psi}(x) \psi(x) \quad (3.14)$$

Variation von $\mathcal{L}$ nach $\vec{\phi}$ bzw $\partial_{\mu} \vec{\phi}$ liefert ebenfalls eine Klein-Gordon-Gleichung

$$[\square + m^2] \vec{\phi}(x) = i g_f \bar{\psi}(x) \vec{\tau} \gamma_5 \psi(x) \quad (3.15)$$

Variiert man $\mathcal{L}$ nach $\vec{\chi}^{\nu}$ bzw $\partial_{\mu} \vec{\chi}^{\nu}$, so erhält man die Proca-Gleichung mit einem Quellterm

$$\partial^{\mu} \vec{G}_{\mu\nu}(x) + m_s^2 \vec{\chi}_{\nu}(x) = + g_f \bar{\psi}(x) \vec{\tau} \gamma_{\nu} \psi(x) \quad (3.16)$$

Die Proca-Gleichung beschreibt Teilchen mit endlicher Ruhemasse und Spin 1.

Differenziert man Gleichung (3.16) und verwendet man dabei $\partial^{\nu} \partial^{\mu} \vec{G}_{\mu\nu} = 0$, weil $\vec{G}_{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist, so erhält man

$$m_s^2 \partial^{\nu} \vec{\chi}_{\nu}(x) = + g_f \partial^{\nu} (\bar{\psi}(x) \vec{\tau} \gamma_{\nu} \psi(x)) = 0 \quad (3.17)$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus (3.13). Aus den Gleichungen (3.16) und (3.17) folgt:

$$[\square + m_s^2] \vec{\chi}_{\nu}(x) = + g_f \bar{\psi}(x) \vec{\tau} \gamma_{\nu} \psi(x) \quad (3.18)$$

Analog erhält man für den Feldoperator des ω -Mesons

$$[\square + m_\omega^2] \lambda_\nu(x) = + g_\omega \bar{\psi}(x) \gamma_\nu \psi(x) \quad (3.19)$$

Aus den Gleichungen (3.14), (3.15), (3.18) und (3.19)

lassen sich die Mesonenfeldoperatoren berechnen

$$\varphi(x) = \int D_{m_\pi}^R(x-y) g_\pi \bar{\psi}(y) \psi(y) d^4y \quad (3.20)$$

$$\vec{\phi}(x) = \int D_{m_\rho}^R(x-y) i g_\rho \bar{\psi}(y) \vec{\tau} \gamma_5 \psi(y) d^4y \quad (3.21)$$

$$\vec{\chi}_\nu(x) = \int D_{m_\sigma}^R(x-y) g_\sigma \bar{\psi}(y) \vec{\tau} \gamma_\nu \psi(y) d^4y \quad (3.22)$$

$$\lambda_\nu(x) = \int D_{m_\omega}^R(x-y) g_\omega \bar{\psi}(y) \gamma_\nu \psi(y) d^4y \quad (3.23)$$

D_m^R ist der retardierte Propagator der Klein-Gordon-Gleichung. Er hat folgende funktionale Gestalt (s. Anhang B)

$$D_m^R(z) = \frac{1}{2\pi} \Theta(z) \delta(z_\mu z^\mu) - \frac{m}{4\pi} \frac{\Theta(z_\mu z^\mu)}{\sqrt{z_\mu z^\mu}} \Theta(z) J_1(m\sqrt{z_\mu z^\mu})$$

$$\Theta(z) \equiv \begin{cases} 1 & z_0 > 0 \\ 0 & z_0 < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

$J_1(z)$ ist eine Besselfunktion von ganzzahliger Ordnung (Abra 65). m ist die Masse des propagierenden Mesons.

Nun setzen wir die Gleichungen (3.20) bis (3.23) in die Gleichung (3.11) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
 (-i\gamma_\mu \partial_\mu^* + M) \psi(x_1) &= g_\sigma^2 \int D_{m_\sigma}^R(x_1-x_2) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_2) d^4x_2 \psi(x_1) - \\
 &- g_\pi^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \int D_{m_\pi}^R(x_1-x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma_5 \psi(x_2) d^4x_2 \gamma_5 \psi(x_1) \\
 &- g_\rho^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \int D_{m_\rho}^R(x_1-x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) d^4x_2 \gamma_\nu \psi(x_1) \\
 &- g_\omega^2 \int D_{m_\omega}^R(x_1-x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) d^4x_2 \gamma_\nu \psi(x_1)
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung (3.25) führt zu der Lagrange-Dichte im Nukleonenraum

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^N(x_1) &= -\frac{1}{2} \bar{\psi}(x_1) \left[(-i\gamma_\mu \partial_\mu^* + M) + (i\vec{\partial}_1^* \gamma_\mu + M) \right] \psi(x_1) \\
 &+ g_\sigma^2 \bar{\psi}(x_1) \int D_{m_\sigma}^R(x_1-x_2) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_2) d^4x_2 \psi(x_1) \\
 &- g_\pi^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \bar{\psi}(x_1) \int D_{m_\pi}^R(x_1-x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma_5 \psi(x_2) d^4x_2 \gamma_5 \psi(x_1) \\
 &- g_\rho^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \bar{\psi}(x_1) \int D_{m_\rho}^R(x_1-x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) d^4x_2 \gamma_\nu \psi(x_1) \\
 &- g_\omega^2 \bar{\psi}(x_1) \int D_{m_\omega}^R(x_1-x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) d^4x_2 \gamma_\nu \psi(x_1)
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

Nach Gleichung (2.40) ergibt sich dann für den Operator der Hamilton-Dichte

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^N(x_1) &\equiv \pi_\alpha(x_1) \partial_\alpha^* \psi_\alpha(x_1) - \mathcal{L}(x_1) = \\
 &= \frac{1}{2} \bar{\psi}(x_1) \left[(-i\gamma_\mu \vec{\partial}_1^* + M) + (i\gamma_\mu \vec{\partial}_1^* + M) \right] \psi(x_1) \\
 &- g_\sigma^2 \bar{\psi}(x_1) \int D_{m_\sigma}^R(x_1-x_2) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_2) d^4x_2 \psi(x_1) \\
 &+ g_\pi^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \bar{\psi}(x_1) \int D_{m_\pi}^R(x_1-x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma_5 \psi(x_2) d^4x_2 \gamma_5 \psi(x_1) \\
 &+ g_\rho^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \bar{\psi}(x_1) \int D_{m_\rho}^R(x_1-x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) d^4x_2 \gamma_\nu \psi(x_1) \\
 &+ g_\omega^2 \bar{\psi}(x_1) \int D_{m_\omega}^R(x_1-x_2) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) d^4x_2 \gamma_\nu \psi(x_1)
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

Hieraus erhalten wir schließlich den Hamilton-Operator:

$$\begin{aligned}
 H &\equiv H^N = \int_{x_1^0=t=\text{const}} \mathcal{H}^N(x_1) d^3x_1 = \\
 &= \int_{x_1^0=t=\text{const}} \bar{\Psi}(x_1) (-i \underline{\gamma} \cdot \vec{\nabla}_1 + M) \Psi(x_1) d^3x_1 \\
 &- g_r^2 \int_{x_1^0=t=\text{const}} \bar{\Psi}(x_1) \bar{\Psi}(x_2) D_{m_r}^R(x_1-x_2) \Psi(x_2) \Psi(x_1) d^3x_1 d^3x_2 \\
 &+ g_r^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \int_{x_1^0=t=\text{const}} \bar{\Psi}(x_1) \bar{\Psi}(x_2) D_{m_H}^R(x_1-x_2) \gamma_5^{(2)} \Psi(x_2) \gamma_5^{(1)} \Psi(x_1) d^3x_1 d^3x_2 \\
 &+ g_s^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \int_{x_1^0=t=\text{const}} \bar{\Psi}(x_1) \bar{\Psi}(x_2) D_{m_g}^R(x_1-x_2) \gamma^{(2)} \Psi(x_2) \gamma^{(1)} \Psi(x_1) d^3x_1 d^3x_2 \\
 &+ g_w^2 \int_{x_1^0=t=\text{const}} \bar{\Psi}(x_1) \bar{\Psi}(x_2) D_{m_w}^R(x_1-x_2) \gamma^{(2)} \Psi(x_2) \gamma^{(1)} \Psi(x_1) d^3x_1 d^3x_2
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Im folgenden wollen wir der Einfachheit halber

$x_1^0 = t = \text{const} = 0$ setzen.

Wir spalten nun den Hamilton-Operator in zwei Teile auf

$$H = H^{\text{CM}} + H^{\text{int}}$$

wobei H^{CM} die Schwerpunktsbewegung und H^{int} die Bewegung der Nukleonen im Schwerpunktssystem angibt. Geht man nun von einem Lorentz-System zu einem anderen über, so ändert sich nur H^{CM} , nicht jedoch H^{int} . Im Schwerpunktssystem (Ruhesystem des Kerns) werden nun $\Psi(x)$ und $\Psi^*(x)$ nach einem beliebigen, vollständigen System entwickelt. In der Sprache der zweiten Quantisierung erhalten wir dann:

$$\Psi(x) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x) e^{-iE_{\alpha}t} b_{\alpha} + \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x) e^{iE_{\alpha}t} d_{\alpha}^{\dagger} \tag{3.29}$$

$$\Psi^*(x) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^*(x) e^{iE_{\alpha}t} b_{\alpha}^{\dagger} + \sum_{\alpha} f_{\alpha}^*(x) e^{-iE_{\alpha}t} d_{\alpha} \tag{3.30}$$

$f_\alpha(\underline{x})$ ist also ein vollständiges System von Viererspinoren im Ortsraum.

b_α bzw. $b_\alpha^\dagger$ sind Vernichtungs- bzw Erzeugungsoperatoren für Nukleonen im Zustand α .

d_α bzw. $d_\alpha^\dagger$ sind Vernichtungs- bzw Erzeugungsoperatoren für Antinukleonen im Zustand α .

Die Entwicklung (3.29) bzw (3.30) ist natürlich nur sinnvoll, wenn die Bindungsenergie der Nukleonen kleiner als die Masse der Nukleonen (938 MeV) ist. Dies ist in der Kernphysik sicher erfüllt und macht die Entwicklung (3.29) bzw (3.30) erst sinnvoll (Sny 40, Fur 51).

Die Koordinaten x_1 und x_2 in H^{int} sind natürlich nicht unabhängig, sondern sie sind durch den Schwerpunkt miteinander verknüpft. Dieses Problem hat jedoch mit der relativistischen Beschreibung des Atomkerns nichts zu tun. Es ist vielmehr ein typisches Vielkörperphänomen. Auf dieses Problem soll hier nicht näher eingegangen werden. x_1 und x_2 werden im folgenden als unabhängig voneinander betrachtet.

Wir setzen nun die Entwicklungen (3.29), (3.30) und den Propagator (3.24) in den Hamilton-Operator (3.27) ein und erhalten nach etlichen, mühsamen Umformungen (s. Anhang C)

$$\begin{aligned}
 H^{\text{int}} = & \sum_{\alpha, \alpha'} \int f_\alpha^*(\underline{x}) (-i \gamma^0 \underline{\gamma} \cdot \underline{\nabla} + \gamma^0 M) f_\alpha(\underline{x}) d^3x \ b_\alpha^\dagger \ b_\alpha + \\
 & + \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta'} \int f_\alpha^*(\underline{x}_1) f_\beta^*(\underline{x}_2) V_{\alpha, \alpha', \beta, \beta'}(|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|) f_\beta(\underline{x}_2) f_\alpha(\underline{x}_1) \times \\
 & \times d^3x_1 d^3x_2 \ b_\alpha^\dagger \ b_\beta^\dagger \ b_\beta \ b_\alpha \\
 & + \text{Terme mit } d_\alpha \text{ bzw } d_\alpha^\dagger
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned}
 V_{\alpha, \alpha'}(|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|) &= V_{\alpha, \alpha'}(r) = \\
 &= -\gamma_0(1) \gamma_0(2) v(r, m_\pi, g_\pi, E_\alpha - E_{\alpha'}) \\
 &\quad + \vec{\gamma}_1 \vec{\gamma}_2 \gamma_0(1) \gamma_0(2) \gamma_5(1) \gamma_5(2) v(r, m_\pi, g_\pi, E_\alpha - E_{\alpha'}) \\
 &\quad + \vec{\gamma}_1 \vec{\gamma}_2 \gamma_0(1) \gamma_0(2) \gamma_r(1) \gamma_r(2) v(r, m_\pi, g_\pi, E_\alpha - E_{\alpha'}) \\
 &\quad + \gamma_0(1) \gamma_0(2) \gamma_r(1) \gamma_r(2) v(r, m_\omega, g_\omega, E_\alpha - E_{\alpha'}) \\
 v(r, m, g, E_\alpha - E_{\alpha'}) &:= \frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-r\sqrt{m^2 - (E_\alpha - E_{\alpha'})^2}}}{r} \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

Die Terme mit den Antiteilchenvernichtungs- bzw. Antiteilchenerzeugungsoperatoren wurden nicht explizit angegeben, da sie uns in dieser Arbeit nicht interessieren.

In Abb. 3a sind die Funktionen $v(r, m_i, g_i, 0 \text{ MeV})$ mit $r = |\underline{x}_1 - \underline{x}_2|$ und $i = \pi, \sigma, \rho, \omega$ über r aufgetragen. Als Massen und Kopplungskonstanten wurden die Werte von Tabelle 1 verwendet.

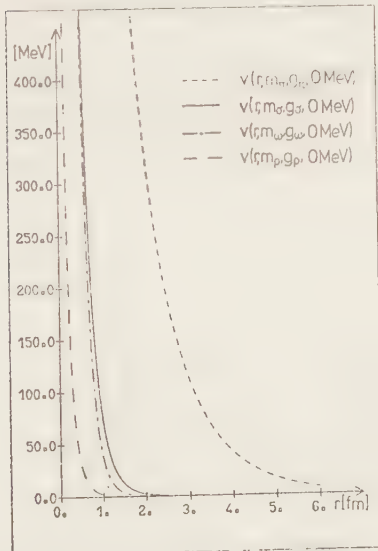


Abb. 3a: Ortsabhängigkeit der nicht-retardierten Meson-Austauschpotentiale (3.32):

$$v(r, m_i, g_i, E=0 \text{ MeV}) = \frac{g_i^2}{4\pi} \frac{e^{-m_i r}}{r}$$

$$i = \pi, \sigma, \rho, \omega$$

Weiterhin sei bemerkt, daß durch die Berücksichtigung der Retardierung die Potentiale energieabhängig (zustandsabhängig) werden. Beim leichtesten Meson, nämlich dem π -Meson, ist die Energieabhängigkeit am wichtigsten. Um diese Energieabhängigkeit zu veranschaulichen, haben wir $E_{\alpha} - E_{\alpha'} = 55 \text{ MeV}$ gewählt. Abb.3b zeigt $v(r, m_{\pi}, g_{\pi}, 55 \text{ MeV})$ im Vergleich zu $v(r, m_{\pi}, g_{\pi}, 0 \text{ MeV})$. Die Massen und Kopplungskonstanten wurden wieder der Tabelle 1 entnommen.

Bei $r = 2 \text{ fm}$ ist das Potential mit Retardierung 380.5 MeV , während man ohne Retardierung 338.6 MeV erhält; bei $r = 3 \text{ fm}$ ergibt sich das Potential mit bzw ohne Retardierung zu

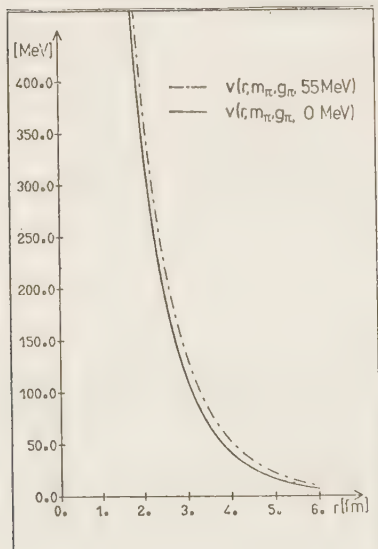


Abb.3b: π -Mesonen-Austauschpotential mit bzw ohne Retardierung

$$v(r, m_{\pi}, g_{\pi}, E) = \frac{g_{\pi}^2}{4\pi} \frac{e^{-r\sqrt{m_{\pi}^2 - E^2}}}{r}$$

133.17 MeV bzw 111.79 MeV . Für $E_{\alpha} - E_{\alpha'} = 55 \text{ MeV}$ ist die Retardierung im Pion-Potential also ein 10-20% Effekt. Bei den anderen Mesonen ist die Retardierung für $E_{\alpha} - E_{\alpha'} = 55 \text{ MeV}$

so klein, daß man sie graphisch nicht mehr veranschaulichen kann.

Die Energieabhängigkeit der Potentiale hat sehr interessante Konsequenzen. Dazu betrachten wir ein Nukleon im Zustand α , das ein Meson erzeugt und dabei in den Zustand β ($\beta \neq \alpha$) übergeht. Ein zweites Nukleon, das sich im Zustand β befindet, vernichtet dieses Meson, dessen Retardierung berücksichtigt wird, und geht in den Zustand α über. Den Feynman-Graphen dieses Prozesses findet man in Abb. 4a.

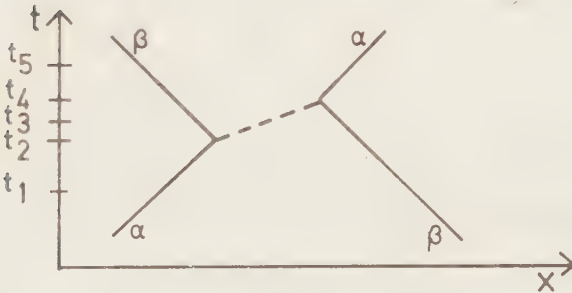


Abb. 4a: Feynman-Graph des Ein-Boson-Austausches

In dem Hamilton-Operator der Gleichung (3.31) wird die Wechselwirkung desselben Prozesses durch ein zeitunabhängiges, dafür aber energieabhängiges "Potential" beschrieben (s. Abb. 4b).

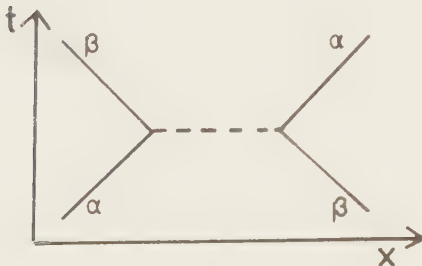


Abb. 4b: Feynman-Graph des zeitunabhängigen, dafür aber energieabhängigen Ein-Boson-Austausch-Potentials

Wir werden später sehen, daß der Prozeß, der in Abb. 4a bzw 4b dargestellt ist, nicht Null ist. Nun betrachten wir nochmals die Abb. 4a. Zur Zeit t_1 sind die beiden Nukleonen in den Zuständen α bzw $\beta(\beta + \alpha)$. Dann wird ein Meson erzeugt und zur Zeit t_3 befinden sich beide Nukleonen im Zustand β . Zur Zeit t_5 befinden sich die Nukleonen wieder in den Zuständen α bzw β . An diesem Prozeß sieht man deutlich, daß kurzzeitig zwei Nukleonen in demselben Zustand sein dürfen! Dies widerspricht dem Pauli-Prinzip nicht, denn es wurde ja durch die Kommutatoren (2.31) in die Theorie integriert. Das Pauli-Prinzip läßt also Wechselwirkungen der in Abb. 4a dargestellten Art durchaus zu.

III. 2 Der Hamilton-Operator für Atomkerne, deren Bausteine ausgedehnte Nukleonen sind

In diesem Kapitel soll das Modell von Kapitel III.1 auf ausgedehnte Nukleonen erweitert werden. Wir beginnen wieder mit der Lagrange-Dichte (3.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_N^{\text{free}} + \mathcal{L}_\sigma^{\text{free}} + \mathcal{L}_\pi^{\text{free}} + \mathcal{L}_\rho^{\text{free}} + \mathcal{L}_\omega^{\text{free}} + \\ & + \mathcal{L}_{NN\sigma}^{\text{int}} + \mathcal{L}_{NN\rho}^{\text{int}} + \mathcal{L}_{NN\pi}^{\text{int}} + \mathcal{L}_{NN\omega}^{\text{int}} . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die freien Lagrange-Dichten sind durch (3.2) bis (3.6b) gegeben. Nun sollen die Nukleonen und Mesonen ausgedehnt sein. Dies wird durch nichtlokale Lagrange-Dichten für die Wechselwirkung erreicht:

$$\mathcal{L}_{NN\pi}^{\text{int}} = g_\pi \int \bar{\psi}(x') \psi(x'') \gamma(x') f_{NN\pi}(x-x', x-x'') d^4x' d^4x'' \quad (3.34)$$

$$\mathcal{L}_{NN\pi}^{\text{int}} = i g_\pi \int \bar{\psi}(x') \vec{\phi}(x'') \vec{\tau} \gamma_5 \gamma(x') f_{NN\pi}(x-x', x-x'') d^4x' d^4x'' \quad (3.35)$$

$$\mathcal{L}_{NN\pi}^{\text{int}} = -g_\pi \int \bar{\psi}(x') \vec{\chi}(x'') \vec{\tau} \gamma_\nu \gamma(x') f_{NN\pi}(x-x', x-x'') d^4x' d^4x'' \quad (3.36)$$

$$\mathcal{L}_{NN\omega}^{\text{int}} = -g_\omega \int \bar{\psi}(x') \lambda(x'') \gamma_\nu \gamma(x') f_{NN\omega}(x-x', x-x'') d^4x' d^4x'' \quad (3.37)$$

$f(x-x', x-x'')$ gibt die Ausdehnung der Nukleonen und Mesonen an. Man beachte weiterhin die Reihenfolge der Operatoren, da die Nukleonenfeldoperatoren nicht mit den Mesonenfeldoperatoren vertauschbar sind.

Zuerst variieren wir wieder $\mathcal{L}$ nach $\bar{\psi}$ bzw. $\partial_\mu \bar{\psi}$. Es ergibt sich die Dirac-Gleichung mit einem Quellterm

$$\begin{aligned} (-i \gamma^\mu \vec{\partial}_\mu + M) \psi(x) &= g_\pi \int \psi(x'') \gamma(x'') f_{NN\pi}(0, x-x'') d^4x'' \\ &+ i g_\pi \int \vec{\phi}(x'') \vec{\tau} \gamma_5 \psi(x'') f_{NN\pi}(0, x-x'') d^4x'' \\ &- g_\pi \int \vec{\chi}(x'') \vec{\tau} \gamma_\nu \psi(x'') f_{NN\pi}(0, x-x'') d^4x'' \\ &- g_\omega \int \lambda(x'') \gamma_\nu \psi(x'') f_{NN\omega}(0, x-x'') d^4x'' \end{aligned} \quad (3.38)$$

Variation von $\mathcal{L}$ nach ψ und $\partial_\mu \psi$ liefert die zu (3.38) adjungierte Dirac-Gleichung

$$\begin{aligned}
 \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu + M) &= g_r \int \bar{\Psi}(x') \Psi(x'') f_{NN\sigma}(0, x-x'') d^4x'' \\
 &+ i g_\pi \int \bar{\Psi}(x') \vec{\phi}(x'') \vec{\tau} \gamma_5 f_{NN\pi}(0, x-x'') d^4x'' \\
 &- g_\rho \int \bar{\Psi}(x') \vec{\chi}(x'') \vec{\tau} \gamma_\nu f_{NN\rho}(0, x-x'') d^4x'' \\
 &- g_\omega \int \bar{\Psi}(x') \chi(x'') \gamma_\nu f_{NN\omega}(0, x-x'') d^4x''
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Multipliziert man Gleichung (3.38) von links mit $(-\bar{\Psi}(x))$ und Gleichung (3.39) von rechts mit $\Psi(x)$ und addiert die entstehenden Gleichungen, so ergibt sich wiederum die Kontinuitätsgleichung für den Nukleonenstrom (s.(3.13))

$$\partial_\mu (\bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x)) = 0 \tag{3.40}$$

Variation von $\mathcal{L}$ nach Ψ bzw $\partial_\mu \Psi$ liefert als Lagrange-Gleichung die Klein-Gordon-Gleichung mit einem Quellterm:

$$[\square + m_\rho^2] \Psi(x) = g_\rho \int \bar{\Psi}(x') \Psi(x') f_{NN\rho}(x-x', 0) d^4x' \tag{3.41}$$

Analog zu (3.15), (3.18) und (3.19) erhält man die Differentialgleichungen für die anderen Mesonenfeldoperatoren

$$[\square + m_\pi^2] \vec{\phi}(x) = i g_\pi \int \bar{\Psi}(x') \vec{\tau} \gamma_5 \Psi(x') f_{NN\pi}(x-x', 0) d^4x' \tag{3.42}$$

$$[\square + m_\rho^2] \vec{\chi}_\nu(x) = + g_\rho \int \bar{\Psi}(x') \vec{\tau} \gamma_\nu \Psi(x') f_{NN\rho}(x-x', 0) d^4x' \tag{3.43}$$

$$[\square + m_\omega^2] \chi_\nu(x) = + g_\omega \int \bar{\Psi}(x') \gamma_\nu \Psi(x') f_{NN\omega}(x-x', 0) d^4x' \tag{3.44}$$

Zur Herleitung der Gleichungen (3.43) und (3.44) siehe Anhang D.

Der Übersicht halber wollen wir in den folgenden Gleichungen nur das σ -Meson explizit berücksichtigen. Die anderen Mesonen lassen sich analog zum σ -Meson einfügen. Der Feldoperator für das σ -Meson ergibt sich aus Gleichung (3.41)

$$\psi(x) = g_r \int D_{m_\sigma}^R(x-y) \bar{\psi}(x') \psi(x') f_{NN\sigma}(y-x', 0) d^4x' d^4y \quad (3.45)$$

Die Gleichung (3.45) setzen wir in die Dirac-Gleichung (3.38) ein.

$$\begin{aligned} & (-i \gamma_\mu \vec{\partial}_\mu + M) \psi(x_1) = \\ & = g_r \int D_{m_\sigma}^R(x_1'' - x_2) \bar{\psi}(x') \psi(x') f_{NN\sigma}(x_1 - x', 0) x \\ & \quad \times \psi(x_1) f_{NN\sigma}(0, x_1 - x'') d^4x' d^4x'' d^4x_2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung (3.46) führt über die Lagrange-Dichte und die Hamilton-Dichte zu dem Hamilton-Operator im Nukleonenraum.

$$\begin{aligned} H &= \int \bar{\psi}(x_1) (-i \underline{\gamma} \vec{\partial}_1 + M) \psi(x_1) d^3x_1 \\ & \quad \substack{x_1^0 = t = \text{const} \\ - g_r^2 \int \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x') D_{m_\sigma}^R(x_1'' - x_2) \psi(x') \psi(x_1) x \\ & \quad \substack{x_1^0 = t = \text{const} \\ \times f_{NN\sigma}(x_2 - x', 0) f_{NN\sigma}(0, x_1 - x'') d^4x' d^4x'' d^3x_1 d^4x_2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Es sei nun

$$f_{\mu\nu K}(0, x) = f_{\mu\nu K}(x, 0) = \\ = F_{\mu\nu K}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{iqx} F_{\mu\nu K}(q) d^4q \quad K = \sigma, \pi, \rho, \omega \quad (3.48)$$

$F_{\mu\nu K}(q)$ wählen wir aus praktischen Gründen folgendermaßen

$$F_{\mu\nu K}(q) = \sqrt{\frac{\Lambda^2 - m_K^2}{\Lambda^2 - q^2}} \quad K = \sigma, \pi, \rho, \omega \quad (3.49)$$

Man nennt $F_{\mu\nu K}(q)$ auch den Formfaktor. Λ liegt zwischen m_N und $2 m_N$ je nach Autor (Hol 76, Erk 74, Bon 74, Ue 69, Ue 68)

Setzt man diesen Formfaktor in (3.47) ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen (s. Anhang E)

$$H = \int \bar{\Psi}(x_1) (-i \underline{\gamma} \underline{\nabla} + M) \Psi(x_1) d^3x_1 \\ x_1^0 = t = \text{const} \\ - q_r^L \int \bar{\Psi}(x_1) \bar{\Psi}(x_2) [D_{m_r}^R(x_1 - x_2) - D_{\Lambda}^R(x_1 - x_2)] \times \\ x_2^0 = t = \text{const} \quad \times \Psi(x_2) \Psi(x_1) d^3x_1 d^3x_2 \quad (3.50)$$

Dieser Hamilton-Operator läßt sich genauso wie der Hamilton-Operator (3.28) weiterumformen. Als Endergebnis erhält man schließlich

$$H^{int} = \sum_{\alpha, \alpha'} \int f_{\alpha'}^*(x) (-i \gamma^0 \underline{\gamma} \underline{\nabla} + \gamma^0 M) f_{\alpha}(x) d^3x b_{\alpha'}^{\dagger} b_{\alpha} \\ + \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta'} \int f_{\alpha'}^*(x_1) f_{\beta'}^*(x_2) V_{\alpha, \alpha'}(x_1 - x_2) f_{\beta}(x_2) f_{\alpha}(x_1) \times \\ \times d^3x_1 d^3x_2 b_{\alpha'}^{\dagger} b_{\beta'}^{\dagger} b_{\beta} b_{\alpha} \\ + \text{Terme mit } d_{\alpha} \text{ bzw } d_{\alpha}^{\dagger} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned}
 V_{\alpha, \alpha'} (|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|) &= V_{\alpha, \alpha'}(\tau) = \\
 &= -\gamma_0(1) \gamma_0(2) \left[v(\tau, m, g, E_\alpha - E_{\alpha'}) - v(\tau, \Lambda, g, E_\alpha - E_{\alpha'}) \right] \\
 &+ \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 \gamma_0(1) \gamma_0(2) \gamma_5(1) \gamma_5(2) \left[v(\tau, m, g, E_\alpha - E_{\alpha'}) - v(\tau, \Lambda, g, E_\alpha - E_{\alpha'}) \right] \\
 &+ \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 \gamma_0(1) \gamma_0(2) \gamma_\nu(1) \gamma^\nu(2) \left[v(\tau, m, g, E_\alpha - E_{\alpha'}) - v(\tau, \Lambda, g, E_\alpha - E_{\alpha'}) \right] \\
 &+ \gamma_0(1) \gamma_0(2) \gamma_\nu(1) \gamma^\nu(2) \left[v(\tau, m, g, E_\alpha - E_{\alpha'}) - v(\tau, \Lambda, g, E_\alpha - E_{\alpha'}) \right] \\
 v(\tau, m, g, E_\alpha - E_{\alpha'}) &= \frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-\tau \sqrt{m^2 - (E_\alpha - E_{\alpha'})^2}}}{\tau}
 \end{aligned}$$

(3.52)

Dies ist der relativistische Hamilton-Operator unter Berücksichtigung des Formfaktors. Die Terme mit den Antiteilchenvernichtungs- bzw. Antiteilchenerzeugungsoperatoren wurden wieder nicht explizit angegeben, da sie uns in dieser Arbeit nicht interessieren. Weil das Λ in der Größenordnung der Nukleonenmasse ist, wird bei den zweiten Termen in den Klammern des "Potentials" die Retartierung sicher unwichtig sein. Deshalb kann man bei den zweiten Termen in den Klammern die Energieabhängigkeit vernachlässigen.

IV. Hartree-Fock für Atomkerne mit abgeschlossenen Schalen

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, wie man zu approximativen Lösungen des Hamilton-Operators aus Kapitel III kommt. Dazu sollen die üblichen Vielteilchenmethoden verwendet werden. Alle mikroskopischen Vielteilchenmethoden für Systeme, die aus endlich vielen gebundenen Nukleonen bestehen, basieren auf dem Hartree-Fock-Verfahren, da dieses Verfahren als einziges Einteilchenwellenfunktionen und Einteilchenenergien liefert. Deshalb soll in diesem Kapitel gezeigt werden, wie man von dem relativistischen Hamilton-Operator von Kapitel III auf die Hartree-Fock-Gleichungen kommt. Um den formalen Aufwand so gering wie möglich zu halten, soll die Hartree-Fock-Methode nur auf Atomkerne mit abgeschlossenen Schalen angewendet werden. Außerdem wollen wir nur solche Atomkerne betrachten, deren Protonen- und Neutronenzahl gleich ist (z.B. O^{16} , Ca^{40}). Weiterhin soll in diesem Kapitel auf die Ausdehnung der Nukleonen verzichtet werden. Wenn man nämlich die Hartree-Fock-Gleichungen für Atomkerne, die aus punktförmigen Nukleonen bestehen, kennt, dann ist es leicht, die Hartree-Fock-Gleichungen für Atomkerne mit ausgedehnten Nukleonen anzugeben. Dies liegt an der großen Ähnlichkeit der beiden Hamilton-Operatoren von Kapitel III für Atomkerne mit und ohne Ausdehnung der Nukleonen, hat man die Hartree-Fock-Gleichungen dann einmal numerisch gelöst, so hat man sich die Basisfunktionen beschafft, die für die meisten weiterführenden Vielteilchenmethoden notwendig sind. Man kann dann zum Beispiel im Rahmen des relativistischen, feldtheoretischen Modells von Kapitel III Kernanregungen in der Tamm-Dancoff-Approximation (TDA) oder der Random-Phase-Approximation (RPA) berechnen.

IV. 1 Erwartungswert des Hamilton-Operators

Um die Hartree-Fock-Gleichungen aufstellen zu können, berechnen wir zunächst den Erwartungswert des Hamilton-Operators (3.31) für Atomkerne mit abgeschlossenen Schalen und gleicher Neutronen- und Protonenzahl. Als Näherung für den A Nukleonenzustand nehmen wir

$$|\Psi\rangle = b_{\alpha_1}^\dagger b_{\alpha_2}^\dagger \dots b_{\alpha_A}^\dagger |0\rangle \quad (4.1)$$

bei dem die Einteilchenzustände $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_A\rangle$ besetzt sind.

$|0\rangle$ ist der Zustandsvektor für das Vakuum. Das Hartree-Fock-Verfahren liefert uns dann Einteilchenenergien und Einteilchenwellenfunktionen. Den Erwartungswert des Hamilton-Operators (3.31) für den Zustand $|\Psi\rangle$ erhält man in bekannter Weise (Ede 65)

$$\begin{aligned} I &= \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \\ &= \sum_{\alpha=1}^A \int f_{\alpha}^*(\underline{x}) (-i \gamma^0 \underline{\gamma} \nabla + \gamma^0 M) f_{\alpha}(\underline{x}) d^3x \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha'=1 \\ \alpha \neq \alpha'}}^A \int f_{\alpha}^*(\underline{x}_1) f_{\alpha'}^*(\underline{x}_2) V_{\alpha, \alpha'}(|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|) f_{\alpha}(\underline{x}_1) f_{\alpha'}(\underline{x}_2) d^3x_1 d^3x_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha'=1 \\ \alpha \neq \alpha'}}^A \int f_{\alpha}^*(\underline{x}_1) f_{\alpha'}^*(\underline{x}_2) V_{\alpha, \alpha'}(|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|) f_{\alpha'}(\underline{x}_1) f_{\alpha}(\underline{x}_2) d^3x_1 d^3x_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die Beschränkung $\alpha \neq \alpha'$ kann man fallen lassen

$$\begin{aligned} I = & \sum_{\alpha \in 1}^R \int f_{\alpha}^*(x) (-i \gamma^0 \gamma \nabla + \gamma^0 M) f_{\alpha}(x) d^3x \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \alpha' \in 1}^R \int f_{\alpha}^*(x_1) f_{\alpha'}^*(x_2) V_{\alpha, \alpha'}(|x_1 - x_2|) f_{\alpha}(x_1) f_{\alpha'}(x_2) d^3x_1 d^3x_2 \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \alpha' \in 1}^R \int f_{\alpha}^*(x_1) f_{\alpha'}^*(x_2) V_{\alpha, \alpha'}(|x_1 - x_2|) f_{\alpha}(x_1) f_{\alpha'}(x_2) d^3x_1 d^3x_2 \end{aligned} \quad (4.2a)$$

Die Viererspinoren $f_{\alpha}(x)$ haben folgende Gestalt (Bjo 66)

$$f_{\alpha}(x) = f_{e_j m \mu}(x) = \begin{pmatrix} \frac{i G_{e_j}(\tau)}{\tau} & \psi_{e_j m}(\vec{x}) \\ \frac{F_{e_j}(\tau)}{\tau} & \sigma \cdot \vec{x} \psi_{e_j m}(\vec{x}) \end{pmatrix} w_{\mu, \mu} \quad (4.3)$$

$\psi_{e_j m}(\vec{x})$ sind die Spinorkugelfunktionen

$$\psi_{e_j m}(\vec{x}) \equiv \sum_{m_e, \mu} (e \ m_e \ 1/2 \ \mu | j \ m) Y_{e \ m_e}(\vec{x}) v_{\mu, \mu} \quad (4.4)$$

$w_{\mu, \mu}$ bzw $v_{\mu, \mu}$ sind die Isospin- bzw Spineigenfunktionen.

Für den Erwartungswert der kinetischen Energie

$$\langle T \rangle = \sum_{\alpha \in 1}^R \int f_{\alpha}^*(x) (-i \gamma^0 \gamma \nabla + \gamma^0 M) f_{\alpha}(x) d^3x \quad (4.5)$$

ergibt sich mit (4.3) (s. Anhang F)

$$\begin{aligned} \langle T \rangle = & \sum_{R_1} \hat{x}_1^2 \cdot 2 \int d\tau_1 \left\{ G_{R_1}(\tau_1) \right. \\ & \times \left[M G_{R_1}(\tau_1) - \frac{d F_{R_1}(\tau_1)}{d \tau_1} + \frac{x_1}{\tau_1} F_{R_1}(\tau_1) \right] + \\ & \left. + F_{R_1}(\tau_1) \left[\frac{d G_{R_1}(\tau_1)}{d \tau_1} + \frac{x_1}{\tau_1} G_{R_1}(\tau_1) - M F_{R_1}(\tau_1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Hierbei verwendet man:

$$\begin{aligned} \underline{L} \cdot \underline{C} \quad \psi_{e j_m}(\vec{r}) &= (j^2 - \ell^2 - \frac{3}{4}) \psi_{e j_m}(\vec{r}) = \\ &= -(1 + \kappa) \psi_{e j_m}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\text{mit} \quad \kappa = \begin{cases} -(\ell+1) = -(j+1/2) & \text{für } j = \ell + 1/2 \\ \ell = (j+1/2) & \text{für } j = \ell - 1/2 \end{cases}$$

Außerdem haben wir folgende Abkürzung benutzt

$$R_n := \{ n, \ell, j \} \quad (4.8)$$

Jetzt wollen wir den Erwartungswert der potentiellen Energie berechnen, der vom σ -Mesonen-Austausch herrührt.

$$\begin{aligned} \langle V_\sigma \rangle &= - \frac{1}{2} \frac{g_K^2}{4\pi} \sum_{d, d'=1}^A \int f_d^*(\underline{r}_1) f_{d'}^*(\underline{r}_2) \gamma_0(1) \gamma_0(2) \times \\ &\quad \times \frac{e^{-|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|/\gamma_\sigma}}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} f_d(\underline{r}_1) f_{d'}(\underline{r}_2) d^3 \tau_1 d^3 \tau_2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{g_K^2}{4\pi} \sum_{d, d'=1}^A \int f_{d'}^*(\underline{r}_1) f_d^*(\underline{r}_2) \gamma_0(1) \gamma_0(2) \frac{e^{-|\underline{r}_1 - \underline{r}_2| \sqrt{m_\sigma^2 - (E_d - E_{d'})^2}}}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} \times \\ &\quad \times f_d(\underline{r}_1) f_{d'}(\underline{r}_2) d^3 \tau_1 d^3 \tau_2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Den ersten Term auf der rechten Seite von (4.9) nennen wir den direkten Term. Der zweite Term heißt Austauschterm. Zunächst wollen wir den direkten Term berechnen. Dazu setzen wir die Viererspinoren (4.3) und die Darstellung der γ -Matrizen aus Anhang A in den direkten Term ein.

$$\begin{aligned}
 \langle V_r^D \rangle = & -\frac{1}{2} \frac{g_r^2}{4\pi} \sum_{\substack{n, \ell, j, m, \mu_1}} \sum_{\substack{n_2 \ell_2 j_2 m_2 \mu_2}} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \cdot \\
 & \times \left[\frac{G_{n, \ell, j_1}(\tau_1)}{\tau_1^2} \psi_{\ell_1 j_1 m_1}^+(\hat{r}_1) \psi_{\ell_2 j_2 m_2}(\hat{r}_2) - \frac{F_{n, \ell, j_1}(\tau_1)}{\tau_1^2} \psi_{\lambda_1 j_1 m_1}^+(\hat{r}_1) \psi_{\lambda_2 j_2 m_2}(\hat{r}_2) \right] \times \\
 & \times \frac{e^{-|\tau_1 - \tau_2| m}}{|\tau_1 - \tau_2|} \times \\
 & \times \left[\frac{G_{n, \ell, j_2}(\tau_2)}{\tau_2^2} \psi_{\ell_2 j_2 m_2}^+(\hat{r}_2) \psi_{\ell_1 j_1 m_1}(\hat{r}_1) - \frac{F_{n, \ell, j_2}(\tau_2)}{\tau_2^2} \psi_{\lambda_2 j_2 m_2}^+(\hat{r}_2) \psi_{\lambda_1 j_1 m_1}(\hat{r}_1) \right] \times \\
 & \times \langle w_{\lambda_1 \mu_1} w_{\lambda_2 \mu_2} | w_{\lambda_1 \mu_1} w_{\lambda_2 \mu_2} \rangle
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Um über die Raumwinkel von $\underline{r}_1$ und $\underline{r}_2$ integrieren zu können, entwickeln wir die Yukawa-Funktion nach Kugelfunktionen

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{-|\tau_1 - \tau_2| m}}{|\tau_1 - \tau_2|} = & -4\pi m \sum_{\lambda, \mu} j_\lambda(im\tau_1) h_\lambda^+(im\tau_2) \times \\
 & \times Y_{\lambda \mu}^*(\hat{r}_1) Y_{\lambda \mu}(\hat{r}_2)
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

$h_\lambda^+(z) = j_\lambda(z) + i n_\lambda(z)$ sind die sphärischen Hankel-Funktionen und $j_\lambda(z)$ bzw. $n_\lambda(z)$ sind die sphärischen Bessel- bzw. Neumann-Funktionen. $r_<$ bzw. $r_>$ ist der größere bzw. kleinere Wert von $|\underline{r}_1|$ und $|\underline{r}_2|$.

Für $\langle V_r^D \rangle$ ergibt sich mit der Entwicklung der Yukawa-Funktion

$$\begin{aligned}
 \langle V_r^D \rangle = & \frac{g_r^2}{4\pi} 2\pi m_0 \sum_{n_1, \ell_1, j_1, m_1, \mu_1} \sum_{n_2, \ell_2, j_2, m_2, \mu_2} \sum_{\lambda, \mu} \\
 & \int d^3 r_1 d^3 r_2 f_{\lambda} (i m_0 r_1) h_{\lambda}^{\dagger} (i m_0 r_2) \times \\
 & \times \left[\frac{G_{n_1, \ell_1, j_1}^2(r_1)}{r_1^2} \psi_{\ell_1, j_1, m_1}^{\dagger}(\vec{r}_1) Y_{\lambda, \mu}^*(\vec{r}_1) \psi_{\ell_2, j_2, m_2}(\vec{r}_2) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{F_{n_1, \ell_1, j_1}^2(r_1)}{r_1^2} \psi_{\lambda_1, j_1, m_1}^{\dagger}(\vec{r}_1) Y_{\lambda, \mu}^*(\vec{r}_1) \psi_{\lambda_2, j_2, m_2}(\vec{r}_2) \right] \times \\
 & \times \left[\frac{G_{n_2, \ell_2, j_2}^2(r_2)}{r_2^2} \psi_{\ell_2, j_2, m_2}^{\dagger}(\vec{r}_2) Y_{\lambda, \mu}(\vec{r}_2) \psi_{\ell_1, j_1, m_1}(\vec{r}_1) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{F_{n_2, \ell_2, j_2}^2(r_2)}{r_2^2} \psi_{\lambda_2, j_2, m_2}^{\dagger}(\vec{r}_2) Y_{\lambda, \mu}(\vec{r}_2) \psi_{\lambda_1, j_1, m_1}(\vec{r}_1) \right] \delta_{\mu_1, \mu_2} \delta_{\mu_2, \mu_1}
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Aus (4.12) erkennt man, daß das Isospinmatrizelement den Faktor 4 liefert. Mit Hilfe der Rechenregeln für sphärische Tensoroperatoren (de Sha 63) bekommt man als Endergebnis unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 A_1 &\equiv \{ n_1, \ell_1, j_1 \} \\
 A_2 &\equiv \{ n_2, \ell_2, j_2 \} \\
 \langle V_r^D \rangle = & 2 \frac{g_r^2}{4\pi} m_0 \sum_{A_1} \sum_{A_2} \hat{r}_1^2 \hat{r}_2^2 \int d^3 r_1 d^3 r_2 \\
 & \times f_0(i m_0 r_1) h_0^{\dagger}(i m_0 r_2) [G_{A_1}^2(r_1) - F_{A_1}^2(r_1)] \times \\
 & \times [G_{A_2}^2(r_2) - F_{A_2}^2(r_2)]
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Für den Austauschterm ergibt sich analog

$$\begin{aligned}
 \langle V_{\sigma}^A \rangle &= - \frac{g_{\sigma}^2}{4\pi} \sum_{A_1} \sum_{A_2} \sum_{\substack{L \\ \text{quadr}}} M_{A_1, A_2}^{\sigma} \hat{t}_1^{\sigma} \hat{t}_2^{\sigma} L^2, \\
 &\times \begin{pmatrix} 1 & 1 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \int d\tau_1 d\tau_2 t_1 (i M_{A_1, A_2}^{\sigma} \tau_1) h_L^{\dagger} (i M_{A_1, A_2}^{\sigma} \tau_2) \times \\
 &\times [G_{A_1}(\tau_1) G_{A_2}(\tau_1) - F_{A_1}(\tau_1) F_{A_2}(\tau_1)] \times \\
 &\times [G_{A_1}(\tau_2) G_{A_2}(\tau_2) - F_{A_1}(\tau_2) F_{A_2}(\tau_2)] \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

$$M_{A_1, A_2}^{\kappa} \equiv \sqrt{m_{\kappa}^2 - (E_{A_1} - E_{A_2})^2} \quad \kappa = \sigma, \pi, \omega, \rho \quad (4.15a)$$

Die Erwartungswerte der potentiellen Energie des π -, ρ - und ω -Mesonen-Austausches lassen sich analog berechnen. Beim π - und ρ -Mesonen-Austausch müssen wir jedoch berücksichtigen, daß π - und ρ -Meson den Isospin $T = 1$ haben. Die Atomkerne, die wir betrachten wollen, sollen aber die gleiche Anzahl an Protonen und Neutronen haben. Dann ist das Isospinmatrixelement des direkten Terms für Mesonen mit $T = 1$ Null

$$\sum_{\mu_1, \mu_2} \langle W_{1/2, \mu_1} W_{1/2, \mu_2} | \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 | W_{1/2, \mu_1} W_{1/2, \mu_2} \rangle = 0 \quad (4.16)$$

Das Isospinmatrixelement des Austauschterms für Mesonen mit $T = 1$ ergibt

$$\sum_{\mu_1, \mu_2} \langle w_{1/2, \mu_1} w_{1/2, \mu_2} | \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 | w_{1/2, \mu_1} w_{1/2, \mu_2} \rangle = 6 \quad (4.17)$$

Für den Erwartungswert der potentiellen Energie des π -Mesons erhält man

$$\begin{aligned} \langle V_{\pi}^D \rangle &= 2 \frac{g_{\pi}^2}{4\pi} m_{\pi} \sum_{n_1, \ell_1, j_1, m_1, \mu_1} \sum_{n_2, \ell_2, j_2, m_2, \mu_2} \sum_L \\ &\times (-)^{2j_2 - m_2 - m_2} \hat{j}_1^2 \hat{j}_2^2 \hat{\ell}_1 \hat{\ell}_2 \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \hat{L}^2 \times \\ &\times \begin{pmatrix} \ell_1 & L & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_2 & L & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_1 & L \\ m_1 & -m_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_2 & L \\ m_2 & -m_2 & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\times \left\{ \begin{matrix} L & j_1 & j_1 \\ \frac{1}{2} & \lambda_1 & \ell_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L & j_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & \lambda_2 & \ell_2 \end{matrix} \right\} \int d\tau_1 d\tau_2 f_{\pi}(i m_{\pi} \tau_2) \times \\ &\times h_{\pi}^+ (i m_{\pi} \tau_2) \times G_{n_1, \ell_1, j_1}(\tau_1) F_{n_1, \ell_1, j_1}(\tau_1) G_{n_2, \ell_2, j_2}(\tau_2) F_{n_2, \ell_2, j_2}(\tau_2) \times \\ &\times \langle w_{1/2, \mu_1} w_{1/2, \mu_2} | \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 | w_{1/2, \mu_1} w_{1/2, \mu_2} \rangle \end{aligned} \quad (4.18)$$

Jetzt summieren wir über m_2 und verwenden dabei

$$\sum_r (-)^{s-\sigma} \begin{pmatrix} s & s & d \\ \sigma & -\sigma & 0 \end{pmatrix} = \hat{s} \delta_{d0} \quad (4.19)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \langle V_{\pi}^D \rangle &= 2 \frac{g_{\pi}^2}{4\pi} m_{\pi} \sum_{A_1, m_1, \mu_1} \sum_{A_2, \mu_2} (-)^{j_2 - m_1} \times \\
 &\times \hat{j}_1^2 \hat{j}_2^2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \begin{pmatrix} e_1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & 0 \\ m_1 & -m_1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\times \left\{ \begin{matrix} 0 & j_1 & j_2 \\ \frac{1}{2} & \lambda_1 & e_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 0 & j_2 & j_2 \\ \frac{1}{2} & \lambda_2 & e_2 \end{matrix} \right\} \int d\tau_1 d\tau_2 j_0(i m_{\pi} \tau_1) h_0^+(i m_{\pi} \tau_2) \\
 &\times G_{A_1}(\tau_1) F_{A_1}(\tau_1) G_{A_2}(\tau_2) F_{A_2}(\tau_2) \\
 &\times \langle W_{j_1, \mu_1} W_{j_2, \mu_2} | \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 | W_{j_1, \mu_1} W_{j_2, \mu_2} \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus der Tatsache, daß

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ ist, weil } e_1 + \lambda_1 \text{ ungerade ist.}$$

Schon bei der Summation über m_1 oder m_2 wird der Erwartungswert der potentiellen Energie des π -Mesons zu Null. Dies ist ein wichtiges Ergebnis und hat zur Folge, daß das π -Meson nicht zum Hartree-Potential beiträgt, was wir später sehen werden.

Für den Austauschterm erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \langle V_{\pi}^A \rangle &= -3 \frac{g_{\pi}^2}{4\pi} \sum_{A_1} \sum_{A_2} \sum_{\substack{L \\ \text{ungerade}}} M_{A_1, A_2}^{\pi} \hat{j}_1^2 \hat{j}_2^2 \hat{L}^2 \\
 &\times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \int d\tau_1 d\tau_2 j_L(i M_{A_1, A_2}^{\pi} \tau_1) h_L^+(i M_{A_1, A_2}^{\pi} \tau_2) \\
 &\times [G_{A_2}(\tau_1) F_{A_1}(\tau_1) + F_{A_2}(\tau_1) G_{A_1}(\tau_1)] \\
 &\times [G_{A_2}(\tau_2) F_{A_1}(\tau_2) + F_{A_2}(\tau_2) G_{A_1}(\tau_2)]
 \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Erwartungswerte der potentiellen Energie des φ -Mesonen-Austausches zerlegen wir die Wechselwirkung in zwei Teile

$$\bar{V}_{d,d'}^S(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) = \frac{g_f^2}{4\pi} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \gamma_0(1) \gamma_0(2) \gamma_0(1) \gamma_0(2) \times \\ \times \frac{e^{-|\underline{r}_1 - \underline{r}_2| \sqrt{m_f^2 - (E_d - E_{d'})^2}}}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} \quad (4.21)$$

$$\bar{V}_{d,d'}^S(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) = \frac{g_f^2}{4\pi} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \gamma_0(1) \gamma_0(2) \gamma_K(1) \gamma^K(2) \times \\ \times \frac{e^{-|\underline{r}_1 - \underline{r}_2| \sqrt{m_f^2 - (E_d - E_{d'})^2}}}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} \quad K = 1, 2, 3 \quad (4.22)$$

Dann ist:

$$V_{d,d'}^S(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) = \bar{V}_{d,d'}^S(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) + \bar{V}_{d,d'}^S(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \quad (4.23)$$

Mit einer analogen Notation für die Erwartungswerte erhalten wir

$$\langle \bar{V}_S^D \rangle = 0, \quad (4.24)$$

da die Summation über das Isospinmatrixelement nach (4.16)

Null liefert.

$$\langle \bar{V}_S^A \rangle = -3 \frac{g_f^2}{4\pi} \sum_{R_1} \sum_{R_2} \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 + L \\ \text{gerade}}} M_{R_1, R_2}^S \hat{f}_1^2 \hat{f}_2^2 \hat{L}^2 \times \\ \times \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{matrix} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \hat{f}_L (i M_{R_1, R_2}^S \gamma_L) h_L^+ (i M_{R_1, R_2}^S \gamma_2) \times \\ \times [G_{R_1}(\tau_1) G_{R_2}(\tau_1) + F_{R_1}(\tau_1) F_{R_2}(\tau_1)] \times \\ \times [G_{R_1}(\tau_2) G_{R_2}(\tau_2) + F_{R_1}(\tau_2) F_{R_2}(\tau_2)] \quad (4.25)$$

Da das Matricelement $\langle \bar{V}_S^D \rangle$ nach Summation über die m-Quantenzahl von j_1 oder j_2 Null ergibt (s. Anhang F),

$$\langle \bar{V}_S^D \rangle = 0 \quad (4.26)$$

wird dieser Teil der Wechselwirkung nicht zum Hartree-Potential beitragen. Die Summation über das Isospinmatricelement liefert natürlich ebenfalls Null.

Für das Austauschmatricelement ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle \bar{V}_S^A \rangle = & 6 \frac{g_S^2}{4\pi} \sum_{A_1} \sum_{A_2} \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 + L \\ \text{ungerade}}} M_{A_1, A_2}^S j_1^z j_2^z L^z \cdot \\ & \cdot \left\{ \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \int d\tau_1 d\tau_2 j_L(i M_{A_1, A_2}^S \tau_1) h_L^+(i M_{A_1, A_2}^S \tau_2) \cdot \right. \\ & \cdot G_{A_2}(\tau_1) F_{A_1}(\tau_1) G_{A_1}(\tau_2) F_{A_2}(\tau_2) + \\ & + \left[2 \begin{pmatrix} \ell_2 & L & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \right] \cdot \\ & \cdot \int d\tau_1 d\tau_2 j_L(i M_{A_1, A_2}^S \tau_1) h_L^+(i M_{A_1, A_2}^S \tau_2) \cdot \\ & \cdot G_{A_1}(\tau_1) F_{A_1}(\tau_1) F_{A_2}(\tau_2) G_{A_2}(\tau_2) \} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Zur Berechnung der Energiewerte der potentiellen Energie

des ω -Mesonen-Austausches kann man analog zum ρ -Mesonen-Austausch vorgehen. Es seien deshalb nur die Ergebnisse aufgelistet:

$$\langle \bar{V}_\omega^D \rangle = 2 \frac{g_\omega^2}{4\pi} m_\omega \sum_{R_1} \sum_{R_2} \hat{f}_1^+ \hat{f}_2^+ \int d\tau_1 d\tau_2 f_0(i m_\omega \tau_1) \times \\ \times h_0^+ (i m_\omega \tau_2) [G_{R_1}^2(\tau_1) + F_{R_1}^2(\tau_1)] [G_{R_2}^2(\tau_2) + F_{R_2}^2(\tau_2)] \quad (4.28)$$

$$\langle \bar{V}_\omega^A \rangle = - \frac{g_\omega^2}{4\pi} \sum_{R_1} \sum_{R_2} \sum_{\substack{L \\ e_1 + e_2 + L \\ \text{grade}}} M_{R_1, R_2}^\omega \hat{f}_1^+ \hat{f}_2^+ \hat{L}^2 \times \\ \times \left(\begin{matrix} j_1 & j_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{matrix} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 f_L(i M_{R_1, R_2}^\omega \tau_1) h_L^+ (i M_{R_1, R_2}^\omega \tau_2) \times \\ \times [G_{R_1}(\tau_1) G_{R_2}(\tau_1) + F_{R_1}(\tau_1) F_{R_2}(\tau_1)] \times \\ \times [G_{R_2}(\tau_2) G_{R_1}(\tau_2) + F_{R_2}(\tau_2) F_{R_1}(\tau_2)] \quad (4.29)$$

$$\langle \bar{\bar{V}}_\omega^D \rangle = 0 \quad (4.30)$$

$$\langle \bar{\bar{V}}_\omega^A \rangle = 2 \frac{g_\omega^2}{4\pi} \sum_{R_1} \sum_{R_2} \sum_{\substack{L \\ e_1 + e_2 + L \\ \text{ungrade}}} M_{R_1, R_2}^\omega \hat{f}_1^+ \hat{f}_2^+ \hat{L}^2 \times \\ \times \left\{ \left(\begin{matrix} j_1 & j_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{matrix} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 f_L(i M_{R_1, R_2}^\omega \tau_1) h_L^+ (i M_{R_1, R_2}^\omega \tau_2) \times \right. \\ \times G_{R_2}(\tau_1) F_{R_1}(\tau_1) G_{R_1}(\tau_2) F_{R_2}(\tau_2) + \\ \left. + \left[2 \left(\begin{matrix} e_2 & L & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right)^2 - \left(\begin{matrix} j_1 & j_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{matrix} \right)^2 \right] \times \int d\tau_1 d\tau_2 f_L(i M_{R_1, R_2}^\omega \tau_1) \times \right. \\ \left. \times h_L^+ (i M_{R_1, R_2}^\omega \tau_2) G_{R_2}(\tau_1) F_{R_1}(\tau_1) F_{R_1}(\tau_2) G_{R_2}(\tau_2) \right\} \quad (4.31)$$

Abschließend sollen noch einmal alle Ergebnisse dieses Kapitels zusammengefaßt werden. Dazu ist der Erwartungswert des Hamilton-Operators für punktförmige Nukleonen (3.31) nochmals vollständig angegeben.

$$\begin{aligned}
 I &= \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \\
 &= \sum_{R_1} \hat{f}_1^2 \cdot 2 \int d\tau_1 \left\{ G_{R_1}(\tau_1) \left[M G_{R_1}(\tau_1) - \frac{dF_{R_1}(\tau_1)}{d\tau_1} + \frac{\chi_1}{\tau_1} F_{R_1}(\tau_1) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + F_{R_1}(\tau_1) \left[\frac{dG_{R_1}(\tau_1)}{d\tau_1} + \frac{\chi_2}{\tau_1} G_{R_1}(\tau_1) - M F_{R_1}(\tau_1) \right] \right\} + \\
 &+ 2 \frac{g_r^2}{4\pi} m_0 \sum_{R_1} \sum_{R_2} \hat{f}_1^2 \hat{f}_2^2 \int d\tau_1 d\tau_2 f_0(i m_0 \tau_1) h_0^+(i m_0 \tau_2) \times \\
 &\quad \times [G_{R_1}^2(\tau_1) - F_{R_1}^2(\tau_1)] [G_{R_2}^2(\tau_2) - F_{R_2}^2(\tau_2)] \\
 &- \frac{g_r^2}{4\pi} \sum_{R_1} \sum_{R_2} \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 = L \\ \text{symmetrisch}}} M_{R_1, R_2}^G \hat{f}_1^2 \hat{f}_2^2 \hat{L}^2 \begin{pmatrix} \hat{f}_1 & \hat{f}_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \times \\
 &\quad \times \int d\tau_1 d\tau_2 f_L(i M_{R_1, R_2}^G \tau_1) h_L^+(i M_{R_1, R_2}^G \tau_2) \times \\
 &\quad \times [G_{R_1}(\tau_1) G_{R_2}(\tau_2) - F_{R_1}(\tau_1) F_{R_2}(\tau_2)] [G_{R_1}(\tau_1) G_{R_2}(\tau_2) - F_{R_1}(\tau_1) F_{R_2}(\tau_2)] \\
 &- 3 \frac{g_r^2}{4\pi} \sum_{R_1} \sum_{R_2} \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 = L \\ \text{symmetrisch}}} M_{R_1, R_2}^T \hat{f}_1^2 \hat{f}_2^2 \hat{L}^2 \begin{pmatrix} \hat{f}_1 & \hat{f}_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \times \\
 &\quad \times \int d\tau_1 d\tau_2 f_L(i M_{R_1, R_2}^T \tau_1) h_L^+(i M_{R_1, R_2}^T \tau_2) \times \\
 &\quad \times [G_{R_1}(\tau_1) F_{R_2}(\tau_2) + F_{R_1}(\tau_1) G_{R_2}(\tau_2)] [G_{R_2}(\tau_2) F_{R_1}(\tau_1) + F_{R_2}(\tau_2) G_{R_1}(\tau_1)] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -3 \frac{g_s^2}{4\pi} \sum_{R_1} \sum_{R_2} \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 + L \\ \text{gerade}}} M_{R_1, R_2}^S \hat{J}_1^L \hat{J}_2^L \hat{L}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & L \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^2 \times \\
 & \times \int d\tau_1 d\tau_2 \delta_L(i M_{R_1, R_2}^S \tau_1) h_L^+(i M_{R_1, R_2}^S \tau_2) \times \\
 & \times [G_{R_1}(\tau_1) G_{R_2}(\tau_1) + F_{R_1}(\tau_1) F_{R_2}(\tau_1)] [G_{R_1}(\tau_2) G_{R_2}(\tau_2) + F_{R_1}(\tau_2) F_{R_2}(\tau_2)] \\
 & + 6 \frac{g_s^2}{4\pi} \sum_{R_1} \sum_{R_2} \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 + L \\ \text{ungerade}}} M_{R_1, R_2}^S \hat{J}_1^2 \hat{J}_2^2 \hat{L}^2 \times \\
 & \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & L \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \delta_L(i M_{R_1, R_2}^S \tau_1) h_L^+(i M_{R_1, R_2}^S \tau_2) \times \right. \\
 & \times G_{R_2}(\tau_1) F_{R_1}(\tau_1) G_{R_2}(\tau_2) F_{R_2}(\tau_2) \times \\
 & \times \left[2 \begin{pmatrix} \ell_2 & L & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & L \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^2 \right] \int d\tau_1 d\tau_2 \delta_L(i M_{R_1, R_2}^S \tau_1) \times \\
 & \times h_L^+(i M_{R_1, R_2}^S \tau_2) G_{R_2}(\tau_1) F_{R_1}(\tau_1) F_{R_1}(\tau_2) G_{R_2}(\tau_2) \left. \right\} \\
 & + 2 \frac{g_w^2}{4\pi} m_w \sum_{R_1} \sum_{R_2} \hat{J}_1^L \hat{J}_2^L \int d\tau_1 d\tau_2 \delta_0(i m_w \tau_1) h_0^+(i m_w \tau_2) \times \\
 & \times [G_{R_1}^2(\tau_1) + F_{R_1}^2(\tau_1)] [G_{R_2}^2(\tau_2) + F_{R_2}^2(\tau_2)] \\
 & - \frac{g_w^2}{4\pi} \sum_{R_1} \sum_{R_2} \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 + L \\ \text{gerade}}} M_{R_1, R_2}^W \hat{J}_1^2 \hat{J}_2^2 \hat{L}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & L \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^2 \times \\
 & \times \int d\tau_1 d\tau_2 \delta_L(i M_{R_1, R_2}^W \tau_1) h_L^+(i M_{R_1, R_2}^W \tau_2) \times \\
 & \times [G_{R_1}(\tau_1) G_{R_2}(\tau_1) + F_{R_1}(\tau_1) F_{R_2}(\tau_1)] [G_{R_1}(\tau_2) G_{R_2}(\tau_2) + F_{R_1}(\tau_2) F_{R_2}(\tau_2)] +
 \end{aligned}$$

$$+ 2 \frac{g_w^2}{4N} \sum_{R_1} \sum_{R_2} \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 + L \\ \text{ungerade}}} M_{R_1, R_2}^W \tilde{f}_1^L \tilde{f}_2^L \tilde{L}^L,$$

$$\times \left\{ \left(\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 & \tilde{f}_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \tilde{f}_L(i M_{R_1, R_2}^W \tau_1) h_L^+(i M_{R_1, R_2}^W \tau_2) \right\}$$

$$\times G_{R_3}(\tau_1) F_{R_1}(\tau_1) G_{R_1}(\tau_2) F_{R_2}(\tau_2) +$$

$$+ \left[2 \left(\begin{pmatrix} \ell_2 & L & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 - \left(\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 & \tilde{f}_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right)^2 \right] \int d\tau_1 d\tau_2 \tilde{f}_L(i M_{R_1, R_2}^W \tau_1) \times$$

$$\times h_L^+(i M_{R_1, R_2}^W \tau_2) G_{R_3}(\tau_1) F_{R_1}(\tau_1) F_{R_1}(\tau_2) G_{R_2}(\tau_2) \}$$

(4.32)

IV. 2 Das Variationsverfahren

Gemäß dem Variationsprinzip erhält man die besten Einzelteilchenwellenfunktionen und -energien, wenn man verlangt, daß bei unabhängiger Variation von $F(r)$ und $G(r)$ unter der Nebenbedingung

$$N = \int f_{\alpha}^*(r) f_{\alpha}(r) d^3r = \int [G_{\alpha}^2(r) + F_{\alpha}^2(r)] d\tau = 1 \quad (4.33)$$

der Erwartungswert des Hamilton-Operators stationär ist:

$$\delta I = \delta \langle \Psi | H | \Psi \rangle = 0 \quad (4.34)$$

Wir fordern also:

$$\delta I + \epsilon \delta N = 0 \quad (4.35)$$

wobei ϵ ein Lagrange-Multiplikator ist.

Zunächst wollen wir den Erwartungswert der kinetischen Energie, den wir mit $\langle T \rangle$ bezeichnen, variieren.

$$\begin{aligned} \delta \langle T \rangle = \sum_{R_i} \hat{r}_i^* \cdot 2 \int d\tau_i \left\{ \delta G_{R_i}(\tau_i) \left[M G_{R_i}(\tau_i) - \frac{dF_{R_i}(\tau_i)}{d\tau_i} + \frac{x_i}{\tau_i} F_{R_i}(\tau_i) \right] + \right. \\ \left. + \delta F_{R_i}(\tau_i) \left[\frac{dG_{R_i}(\tau_i)}{d\tau_i} + \frac{x_i}{\tau_i} G_{R_i}(\tau_i) - M F_{R_i}(\tau_i) \right] + \right. \\ \left. + G_{R_i}(\tau_i) \left[M \delta G_{R_i}(\tau_i) - \frac{d \delta F_{R_i}(\tau_i)}{d\tau_i} + \frac{x_i}{\tau_i} \delta F_{R_i}(\tau_i) \right] + \right. \\ \left. + F_{R_i}(\tau_i) \left[\frac{d \delta G_{R_i}(\tau_i)}{d\tau_i} + \frac{x_i}{\tau_i} \delta G_{R_i}(\tau_i) - M \delta F_{R_i}(\tau_i) \right] \right\} \end{aligned}$$

Nun verlangen wir, daß δG und δF bei $\tau=0$ und $\tau=\infty$ verschwinden. Mit Hilfe einer partiellen Integration erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F_{R_1}(\tau_1) \frac{d \delta G_{R_1}(\tau_1)}{d \tau_1} d \tau_1 &= F_{R_1}(\tau_1) \delta G_{R_1}(\tau_1) \Big|_0^\infty \\ &\quad - \int_0^\infty \frac{d F_{R_1}(\tau_1)}{d \tau_1} \delta G_{R_1}(\tau_1) d \tau_1 = \\ &= - \int_0^\infty \frac{d F_{R_1}(\tau_1)}{d \tau_1} \delta G_{R_1}(\tau_1) d \tau_1 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Mit der Beziehung (4.36) ergibt sich für die Variation der kinetischen Energie

$$\begin{aligned} \delta \langle T \rangle &= \sum_{R_1} \hat{f}_1^+ \cdot 4 \int d \tau_1 \left\{ \delta G_{R_1}(\tau_1) \left[M G_{R_1}(\tau_1) - \frac{d F_{R_1}(\tau_1)}{d \tau_1} + \frac{\chi_1}{\tau_1} F_{R_1}(\tau_1) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \delta F_{R_1}(\tau_1) \left[\frac{d G_{R_1}(\tau_1)}{d \tau_1} + \frac{\chi_1}{\tau_1} G_{R_1}(\tau_1) - M F_{R_1}(\tau_1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die Variation der potentiellen Energie ist trivial und soll hier nicht explizit vorgeführt werden. Als Endergebnis der Variation erhalten wir die Hartree-Fock-Gleichungen für Atomkerne mit abgeschlossenen Schalen und gleicher Neutronen und Protonenzahl (s.nächste Seite). Es wird folgende Abkürzung eingeführt:

$$\sum_{R_i} : = \sum_{R_i, \downarrow R_i}$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_{A_1}(\tau_1)}{d\tau_1} = & G_{A_1}(\tau_1) \left[M - E_{A_1} + \frac{g_F^2}{4\pi} Y^F(\tau_1) + \frac{g_W^2}{4\pi} Y^W(\tau_1) + \frac{g_S^2}{4\pi} Y^S(\tau_1) \right] \\ & + F_{A_1}(\tau_1) \left[\frac{x_1}{\tau_1} + \frac{g_F^2}{4\pi} \tilde{Y}^F(\tau_1) + \frac{g_W^2}{4\pi} \tilde{Y}^W(\tau_1) + \frac{g_S^2}{4\pi} \tilde{Y}^S(\tau_1) \right] \\ & + \frac{g_F^2}{4\pi} W_6^F(A_1, \tau_1) + \frac{g_W^2}{4\pi} W_6^W(A_1, \tau_1) + \frac{g_S^2}{4\pi} W_6^S(A_1, \tau_1) + \\ & + \frac{g_F^2}{4\pi} \tilde{W}_6^F(A_1, \tau_1) + \frac{g_W^2}{4\pi} \tilde{W}_6^W(A_1, \tau_1) + \frac{g_S^2}{4\pi} \tilde{W}_6^S(A_1, \tau_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dG_{A_1}(\tau_1)}{d\tau_1} = & F_{A_1}(\tau_1) \left[M + E_{A_1} + \frac{g_F^2}{4\pi} Y^F(\tau_1) - \frac{g_W^2}{4\pi} Y^W(\tau_1) - \frac{g_S^2}{4\pi} Y^S(\tau_1) \right] \\ & - G_{A_1}(\tau_1) \left[\frac{x_1}{\tau_1} + \frac{g_F^2}{4\pi} \tilde{Y}^F(\tau_1) + \frac{g_W^2}{4\pi} \tilde{Y}^W(\tau_1) + \frac{g_S^2}{4\pi} \tilde{Y}^S(\tau_1) \right] \\ & + \frac{g_F^2}{4\pi} W_F^F(A_1, \tau_1) - \frac{g_W^2}{4\pi} W_6^W(A_1, \tau_1) - \frac{g_S^2}{4\pi} W_F^S(A_1, \tau_1) \\ & - \frac{g_F^2}{4\pi} \tilde{W}_F^F(A_1, \tau_1) - \frac{g_W^2}{4\pi} V_6^W(A_1, \tau_1) - \frac{g_S^2}{4\pi} V_6^S(A_1, \tau_1) \end{aligned}$$

mit:

(4.38)

$$\begin{aligned} Y^F(\tau_1) = & 2m_F \sum_{A_2} \hat{J}_A^2 \int d\tau_2 \hat{J}_0(i m_F \tau_2) h_0^+(i m_F \tau_2) \times \\ & \times [G_{A_2}^2(\tau_1) - F_{A_2}^2(\tau_1)] \\ & - m_F \hat{J}_A^2 \sum_{\substack{L \\ \text{quadr}}} \vec{L}^2 \left(\begin{matrix} \hat{J}_0 & \hat{J}_0 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{matrix} \right)^2 \times \\ & \times \int d\tau_2 \hat{J}_L(i m_F \tau_2) h_L^+(i m_F \tau_2) [G_{A_2}^2(\tau_1) - F_{A_2}^2(\tau_1)] \end{aligned}$$

$$Y^W(\tau_1) = - \left\{ 2 m_W \sum_{R_2} \hat{J}_2^2 \int d\tau_2 g_0(i m_W \tau_2) h_0^\dagger(i m_W \tau_2) \times \right. \\ \times [G_{R_2}^2(\tau_2) + F_{R_2}^2(\tau_2)] \\ \left. - m_W \hat{J}_n^2 \sum_{\substack{L \\ \text{gerade}}} \hat{L}^2 \begin{pmatrix} 1_n & 1_n & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \times \right. \\ \left. \times \int d\tau_2 g_L(i m_W \tau_2) h_L^\dagger(i m_W \tau_2) [G_{R_2}^2(\tau_2) + F_{R_2}^2(\tau_2)] \right\}$$

$$Y^S(\tau_1) = 3 m_S \hat{J}_n^2 \sum_{\substack{L \\ \text{gerade}}} \hat{L}^2 \begin{pmatrix} 1_n & 1_n & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \times \\ \times \int d\tau_2 g_L(i m_S \tau_2) h_L^\dagger(i m_S \tau_2) [G_{R_2}^2(\tau_2) + F_{R_2}^2(\tau_2)]$$

$$\tilde{Y}^H(\tau_1) = -6 m_H \hat{J}_n^2 \sum_{\substack{L \\ \text{ungerade}}} \hat{L}^2 \begin{pmatrix} 1_n & 1_n & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \times \\ \times \int d\tau_2 g_L(i m_H \tau_2) h_L^\dagger(i m_H \tau_2) G_{R_2}(\tau_2) F_{R_2}(\tau_2)$$

$$\tilde{Y}^W(\tau_1) = -2 m_W \hat{J}_n^2 \sum_{\substack{L \\ \text{ungerade}}} \hat{L}^2 \begin{pmatrix} e_n & L & \lambda_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \times \\ \times \int d\tau_2 g_L(i m_W \tau_2) h_L^\dagger(i m_W \tau_2) G_{R_2}(\tau_2) F_{R_2}(\tau_2)$$

$$\tilde{Y}^S(\tau_1) = -6 m_S \hat{J}_n^2 \sum_{\substack{L \\ \text{ungerade}}} \hat{L}^2 \begin{pmatrix} e_n & L & \lambda_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \times \\ \times \int d\tau_2 g_L(i m_S \tau_2) h_L^\dagger(i m_S \tau_2) G_{R_2}(\tau_2) F_{R_2}(\tau_2)$$

$$W_F^{\sigma}(R_1, \tau_1) = - \sum_{R_2}^1 \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 + L \\ \text{gerade}}} M_{R_1, R_2}^{\sigma} \hat{J}_L^{\tau_1} \hat{L}^{\tau_2} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \times$$

$$\times \frac{G_{R_2}(\tau_1)}{F_{R_2}(\tau_1)} \int d\tau_2 J_L(i M_{R_1, R_2}^{\sigma} \tau_2) h_L^+(i M_{R_1, R_2}^{\sigma} \tau_2) [G_{R_1}(\tau_2) G_{R_2}(\tau_2) - F_{R_1}(\tau_2) F_{R_2}(\tau_2)]$$

$$W_F^{\pi}(R_1, \tau_1) = -3 \sum_{R_2}^1 \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 + L \\ \text{ungerade}}} M_{R_1, R_2}^{\pi} \hat{J}_L^{\tau_1} \hat{L}^{\tau_2} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \times$$

$$\frac{G_{R_2}(\tau_1)}{F_{R_2}(\tau_1)} \int d\tau_2 J_L(i M_{R_1, R_2}^{\pi} \tau_2) h_L^+(i M_{R_1, R_2}^{\pi} \tau_2) [G_{R_1}(\tau_2) F_{R_2}(\tau_2) + F_{R_1}(\tau_2) G_{R_2}(\tau_2)]$$

$$W_F^{\omega}(R_1, \tau_1) = \sum_{R_2}^1 \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 + L \\ \text{gerade}}} M_{R_1, R_2}^{\omega} \hat{J}_L^{\tau_1} \hat{L}^{\tau_2} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \times$$

$$\times \frac{G_{R_2}(\tau_1)}{F_{R_2}(\tau_1)} \int d\tau_2 J_L(i M_{R_1, R_2}^{\omega} \tau_2) h_L^+(i M_{R_1, R_2}^{\omega} \tau_2) [G_{R_1}(\tau_2) G_{R_2}(\tau_2) + F_{R_1}(\tau_2) F_{R_2}(\tau_2)]$$

$$W_F^{\rho}(R_1, \tau_1) = 3 \sum_{R_2}^1 \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 + L \\ \text{gerade}}} M_{R_1, R_2}^{\rho} \hat{J}_L^{\tau_1} \hat{L}^{\tau_2} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \times$$

$$\times \frac{G_{R_2}(\tau_1)}{F_{R_2}(\tau_1)} \int d\tau_2 J_L(i M_{R_1, R_2}^{\rho} \tau_2) h_L^+(i M_{R_1, R_2}^{\rho} \tau_2) [G_{R_1}(\tau_2) G_{R_2}(\tau_2) + F_{R_1}(\tau_2) F_{R_2}(\tau_2)]$$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_F^U(A_1, \tau_a) = & - \sum_{A_2}^{\prime} \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 + L \\ \text{integrable}}} M_{A_1, A_2}^U \hat{J}_2^+ \hat{L}^+ F_{A_2}(\tau_a) \times \\ & \times \left\{ \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \int d\tau_1 \hat{J}_L(i M_{A_1, A_2}^U \tau_c) h_L^+(i M_{A_1, A_2}^U \tau_2) F_{A_1}(\tau_1) G_{A_2}(\tau_1) + \right. \\ & \left. + \left[2 \begin{pmatrix} \ell_1 & L & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \right] \int d\tau_1 \hat{J}_L(i M_{A_1, A_2}^U \tau_c) h_L^+(i M_{A_1, A_2}^U \tau_2) F_{A_2}(\tau_1) G_{A_1}(\tau_1) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_F^S(A_1, \tau_a) = & - 3 \sum_{A_2}^{\prime} \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 + L \\ \text{integrable}}} M_{A_1, A_2}^S \hat{J}_2^+ \hat{L}^+ F_{A_2}(\tau_a) \times \\ & \times \left\{ \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \int d\tau_1 \hat{J}_L(i M_{A_1, A_2}^S \tau_c) h_L^+(i M_{A_1, A_2}^S \tau_2) F_{A_1}(\tau_1) G_{A_2}(\tau_1) + \right. \\ & \left. + \left[2 \begin{pmatrix} \ell_1 & L & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \right] \int d\tau_1 \hat{J}_L(i M_{A_1, A_2}^S \tau_c) h_L^+(i M_{A_1, A_2}^S \tau_2) F_{A_2}(\tau_1) G_{A_1}(\tau_1) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_G^U(A_1, \tau_a) = & - \sum_{A_2}^{\prime} \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 + L \\ \text{integrable}}} M_{A_1, A_2}^U \hat{J}_2^+ \hat{L}^+ G_{A_2}(\tau_a) \times \\ & \times \left\{ \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \int d\tau_1 \hat{J}_L(i M_{A_1, A_2}^U \tau_c) h_L^+(i M_{A_1, A_2}^U \tau_2) G_{A_1}(\tau_1) F_{A_2}(\tau_1) + \right. \\ & \left. + \left[2 \begin{pmatrix} \ell_1 & L & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \right] \int d\tau_1 \hat{J}_L(i M_{A_1, A_2}^U \tau_c) h_L^+(i M_{A_1, A_2}^U \tau_2) F_{A_1}(\tau_1) G_{A_2}(\tau_1) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_G^S(A_1, \tau_a) = & - 3 \sum_{A_2}^{\prime} \sum_{\substack{L \\ \ell_1 + \ell_2 + L \\ \text{integrable}}} M_{A_1, A_2}^S \hat{J}_2^+ \hat{L}^+ G_{A_2}(\tau_a) \times \\ & \times \left\{ \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \int d\tau_1 \hat{J}_L(i M_{A_1, A_2}^S \tau_c) h_L^+(i M_{A_1, A_2}^S \tau_2) G_{A_1}(\tau_1) F_{A_2}(\tau_1) + \right. \\ & \left. + \left[2 \begin{pmatrix} \ell_1 & L & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \right] \int d\tau_1 \hat{J}_L(i M_{A_1, A_2}^S \tau_c) h_L^+(i M_{A_1, A_2}^S \tau_2) F_{A_1}(\tau_1) G_{A_2}(\tau_1) \right\} \end{aligned}$$

Da die Hartree-Fock-Gleichungen sehr kompliziert sind, ist es sicher lohnend, sich zunächst mit den Hartree-Gleichungen zu beschäftigen. Die Hartree-Gleichungen berücksichtigen das Pauli-Prinzip nicht. Um sie zu erhalten, gehen wir von dem Erwartungswert (4.2) ohne Austausch-term aus.

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= \sum_{\alpha=1}^N \int f_{\alpha}^*(\underline{x}) (-i\gamma^0 \underline{\gamma} \cdot \nabla + \gamma^0 M) f_{\alpha}(\underline{x}) d^3x \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha'=1 \\ \alpha \neq \alpha'}}^N \int f_{\alpha}^*(\underline{x}_1) f_{\alpha'}^*(\underline{x}_2) V(|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|) f_{\alpha'}(\underline{x}_2) f_{\alpha}(\underline{x}_1) d^3x_1 d^3x_2 \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \int f_{\alpha}^*(\underline{x}) (-i\gamma^0 \underline{\gamma} \cdot \nabla + \gamma^0 M) f_{\alpha}(\underline{x}) d^3x \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \int f_{\alpha}^*(\underline{x}_1) V_d^{Hart}(\underline{x}_1) f_{\alpha}(\underline{x}_1) d^3x_1\end{aligned}\quad (4.39)$$

$$V_d^{Hart}(\underline{x}_1) = \sum_{\substack{\alpha'=1 \\ \alpha \neq \alpha'}}^N \int f_{\alpha'}^*(\underline{x}_2) V(|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|) f_{\alpha'}(\underline{x}_2) d^3x_2\quad (4.40)$$

nennt man das Hartree-Potential.

Da wir ein von der m-Quantenzahl (Quantenzahl der Drehimpulsprojektion) unabhängiges Hartree-Potential haben wollen, summieren wir in (4.40) zunächst unbeschränkt und ziehen dann für $\alpha = \alpha'$ einen Term ab, der über die m-Quantenzahl gemittelt ist.

$$V_{\alpha}^{\text{Hartree}}(\underline{x}_1) = \sum_{\alpha'=1}^R \int f_{\alpha'}^*(\underline{x}_2) V(|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|) f_{\alpha'}(\underline{x}_2) d^3x_2 \\ - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int f_{\alpha}(\underline{x}_1) V(|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|) f_{\alpha}(\underline{x}_2) d^3x_2 \quad (4.41)$$

mit

$$\alpha := n_{\alpha} \ell_{\alpha} j_{\alpha} m_{\alpha} / \mu_{\alpha}$$

Nun wollen wir noch einmal alle vier Mesonenarten durchgehen und uns fragen, welche Mesonen zum Hartree-Potential beitragen. Aus (4.9) bis (4.14) erkennt man, daß das σ -Meson einen großen Beitrag zum Hartree-Potential liefert. Gleichung (4.20) zeigte uns, daß $\langle V_{\pi}^b \rangle$ durch die Summation über eine m-Quantenzahl Null wird. Deshalb sind für das Pion beide Terme des Hartree-Potentials (4.41) Null. Das Pion trägt also nicht zum Hartree-Potential für Atomkerne mit abgeschlossenen Schalen bei! Nach (4.24) ist der erste Term des Hartree-Potentials für $\bar{V}_{\alpha,\alpha'}^s$ Null. Aber für $\alpha=\alpha'$ liefert das ρ -Meson einen kleinen Beitrag. Da aber das Matrixelement $\langle \bar{V}_{\rho}^b \rangle$ nach Summation über eine m-Quantenzahl Null wird, liefert dieser Term der Wechselwirkung keinen Beitrag zum Hartree-Potential. Das ρ -Meson trägt also nur wenig zum Hartree-Potential bei. Beim ω -Meson liefert der Teil der Wechselwirkung, den wir mit $\bar{V}_{\alpha,\alpha'}^{\omega}$ bezeichnet haben, einen großen Beitrag, während $\bar{V}_{\alpha,\alpha'}^{\omega}$ nicht zum Hartree-Potential beiträgt.

Man erhält schließlich analog zur Aufstellung der Hartree-Fock-Gleichungen die Hartree-Gleichung.

$$\begin{aligned} \frac{d F_{R_1}(\tau_1)}{d \tau_1} &= G_{R_1}(\tau_1) [M - E_{R_1} + V_{R_1}^{\sigma}(\tau_1) + V_{R_1}^{\omega}(\tau_1) + V_{R_1}^{\rho}(\tau_1)] \\ &\quad + \frac{\chi_1}{\tau_1} F_{R_1}(\tau_1) \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d G_{R_1}(\tau_1)}{d \tau_1} &= F_{R_1}(\tau_1) [M + E_{R_1} + V_{R_1}^{\sigma}(\tau_1) - V_{R_1}^{\omega}(\tau_1) - V_{R_1}^{\rho}(\tau_1)] \\ &\quad - \frac{\chi_1}{\tau_1} G_{R_1}(\tau_1) \end{aligned} \quad (4.42a)$$

$$\begin{aligned} V_{R_1}^{\sigma}(\tau_1) &= 2 m_{\sigma} \frac{g_{\sigma}^2}{4\pi} \sum_{R_2} \hat{\tau}_1^z \int d\tau_2 \, \mathcal{I}_{\sigma}(i m_{\sigma} \tau_2) h_{\sigma}^{\dagger}(i m_{\sigma} \tau_2) \cdot \\ &\quad \cdot [G_{R_2}^z(\tau_2) - F_{R_2}^z(\tau_2)] \\ &\quad - m_{\sigma} \frac{g_{\sigma}^2}{4\pi} \int d\tau_2 \, \mathcal{I}_{\sigma}(i m_{\sigma} \tau_2) h_{\sigma}^{\dagger}(i m_{\sigma} \tau_2) [G_{R_1}^z(\tau_2) - F_{R_1}^z(\tau_2)] \end{aligned} \quad (4.43a)$$

$$\begin{aligned} V_{R_1}^{\rho}(\tau_1) &= -m_{\rho} \frac{g_{\rho}^2}{4\pi} \int d\tau_2 \, \mathcal{I}_{\rho}(i m_{\rho} \tau_2) h_{\rho}^{\dagger}(i m_{\rho} \tau_2) [G_{R_1}^z(\tau_2) + F_{R_1}^z(\tau_2)] \\ &\quad (4.43b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{R_1}^{\omega}(\tau_1) &= -2 m_{\omega} \frac{g_{\omega}^2}{4\pi} \sum_{R_2} \hat{\tau}_1^z \int d\tau_2 \, \mathcal{I}_{\omega}(i m_{\omega} \tau_2) h_{\omega}^{\dagger}(i m_{\omega} \tau_2) \cdot \\ &\quad \cdot [G_{R_2}^z(\tau_2) + F_{R_2}^z(\tau_2)] \\ &\quad + m_{\omega} \frac{g_{\omega}^2}{4\pi} \int d\tau_2 \, \mathcal{I}_{\omega}(i m_{\omega} \tau_2) h_{\omega}^{\dagger}(i m_{\omega} \tau_2) [G_{R_1}^z(\tau_2) + F_{R_1}^z(\tau_2)] \end{aligned} \quad (4.43c)$$

Im nächsten Kapitel wollen wir uns mit der numerischen Lösung der Hartree-Gleichungen befassen.

V. Numerische Lösung der Hartree-Gleichungen

In diesem Kapitel wird beschrieben, wie die Hartree-Gleichungen von Kapitel IV numerisch gelöst werden und welche Ergebnisse sie liefern. Das numerische Verfahren ist so allgemein, daß es auch auf die Hartree-Fock-Gleichungen angewendet werden kann. Die Hartree-Gleichungen sind zwei gekoppelte Gleichungen erster Ordnung. Sie sind einer Differentialgleichung zweiter Ordnung equivalent. Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung enthält noch einen Term erster Ordnung, den wir aber heraustransformieren können. Wir müssen also schließlich nur noch eine Differentialgleichung lösen, die vom Typ einer radialen Schrödinger-Gleichung ist. Für diesen Typ gibt es aber bewährte Lösungsmethoden, nämlich die Methode von Nuomerov. Als Alternative zu diesem Lösungsweg bietet sich das Runge-Kutta-Verfahren an, mit dem die beiden gekoppelten Gleichungen erster Ordnung direkt gelöst werden können. Das Runge-Kutta-Verfahren ist aber viel zeitraubender als die Nuomerov-Methode, gleiche Genauigkeit beider Verfahren vorausgesetzt. Weitere Möglichkeiten die beiden gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen, sind sogenannte Prediktor-Korrektor-Methoden. Diese lösen die beiden gekoppelten Differentialgleichungen ebenfalls direkt. Die Prediktor-Korrektor-Methoden haben jedoch den Nachteil, daß sie oft instabil sind. Aus diesen Gründen wurde das erste Verfahren, nämlich das Nuomerov-Verfahren ausgewählt. Es hat noch den weiteren Vorteil, daß man mit derselben Methode auch den nichtrelativistischen Grenz-

fall rechnen kann. Um nun die Hartree-Gleichungen lösen zu können, benötigt man zunächst Startwellenfunktionen für $G(r)$ und $F(r)$, um $V^e(r)$, $V^s(r)$ und $V^v(r)$ berechnen zu können.

V. 1. Wahl der Startwellenfunktionen

Es ergeben sich zwei Möglichkeiten, Startwellenfunktionen für $G(r)$ und $F(r)$ zu konstruieren, nämlich "Woods-Saxon-Viererspinoren" bzw "Oszillator-Viererspinoren".

V. 1.1 "Woods-Saxon-Viererspinoren"

Man schreibt zur Masse in der Dirac-Gleichung ein Woods-Saxon-Potential:

$$\frac{dF_{R_1}(\gamma_1)}{d\gamma_1} + G_{R_1}(\gamma_1) [-M - V_{WS}(\gamma_1) + E_{R_1}] - \frac{\gamma_1}{\gamma_1} F_{R_1}(\gamma_1) = 0 \quad (5.1)$$

$$-\frac{dG_{R_1}(\gamma_1)}{d\gamma_1} + F_{R_1}(\gamma_1) [M + V_{WS}(\gamma_1) + E_{R_1}] - \frac{\gamma_1}{\gamma_1} G_{R_1}(\gamma_1) = 0 \quad (5.2)$$

$$V_{ws}(r) = V_0 \left[1 + \exp\left(\frac{r-c}{t}\right) \right]^{-1} \quad (5.3)$$

c ist der mittlere quadratische Radius des Atomkerns, die Größe t gibt die Breite der Randzone des Atomkerns und V_0 gibt die Stärke des Potentials an. Die Gleichungen (5.1, 5.2) lassen sich numerisch lösen und im folgenden soll genauer beschrieben werden, welches numerische Verfahren zur Lösung der Gleichungen (5.1 und 5.2) verwendet wird. Hierzu führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$F'(r) = H(r) G(r) + B(r) F(r) \quad (5.4)$$

$$G'(r) = D(r) F(r) - B(r) G(r) \quad (5.5)$$

Hierbei ist:

$$H(r) = M - E_{R_1} + V_{ws}(r) \quad (5.6)$$

$$D(r) = M + E_{R_1} + V_{ws}(r) \quad (5.7)$$

$$B(r) = \frac{x}{r} \quad (5.8)$$

Diese beiden Differentialgleichungen sollen entkoppelt werden. Dazu leiten wir die Gleichung (5.5) einmal ab:

$$G''(r) = D'(r) F(r) + D(r) F'(r) - B'(r) G(r) - B(r) G'(r) \quad (5.9)$$

Aus Gleichung (5.5) erhalten wir für $F(r)$

$$F(r) = \frac{G'(r) + B(r) G(r)}{D(r)} \quad (5.10)$$

Für die Ableitung von $F(r)$ ergibt sich mit (5.4) und (5.10):

$$F'(r) = H(r) G(r) + \frac{B(r) G'(r) + B^2(r) G(r)}{D(r)} \quad (5.11)$$

Jetzt können wir aus der Differentialgleichung $F(r)$ und $F'(r)$ eliminieren und erhalten eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in G :

$$G''(r) - \frac{D'(r)}{D(r)} G'(r) + \left[-\frac{D'(r)}{D(r)} B(r) - D(r)H(r) - B^2(r) + B'(r) \right] G(r) = 0 \quad (5.12)$$

Um die erste Ableitung aus dieser DGL zu eliminieren, setzt man:

$$G(r) = \sqrt{D(r)} g(r)$$

$$G'(r) = \sqrt{D(r)} \left[g'(r) + \frac{1}{2} \frac{D'(r)}{D(r)} g(r) \right]$$

$$G''(r) = \sqrt{D(r)} \left[g''(r) + g'(r) \frac{D'(r)}{D(r)} + g(r) \left(\frac{D''(r)}{2D(r)} - \frac{D'^2(r)}{4D^2(r)} \right) \right] \quad (5.13)$$

Hiermit ergibt sich die neue DGL

$$g''(r) = g(r) \left[-\frac{D''(r)}{2D(r)} + \frac{3}{4} \frac{D'^2(r)}{D^2(r)} + \frac{D'(r)}{D(r)} B(r) + B^2(r) - B'(r) + D(r)H(r) \right] \quad (5.14)$$

Nun ist

$$B^2(r) - B'(r) = \frac{x(x+1)}{r^2} = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \quad (5.15)$$

Das letzte Gleichheitszeichen ergibt sich aus der Definition von χ (5.7).

Mit (5.15) lautet die DGL (5.14)

$$g''(\tau) = g(\tau) \left[-\frac{D''(\tau)}{2D(\tau)} + \frac{3}{4} \frac{D'^2(\tau)}{D^2(\tau)} + \frac{D'(\tau)}{D(\tau)} \frac{\chi}{\tau} + \frac{C(\tau)}{\tau^2} + D(\tau)H(\tau) \right] \quad (5.16)$$

Diese DGL lösen wir numerisch mit der Methode von Nuomerov (Bla 67) und erhalten die Einteilchenenergieen und die Funktionen $g(r)$. Um die Wellenfunktionen $G(r)$ und $F(r)$ zu bekommen, müssen wir zurücktransformieren:

$$G(\tau) = \sqrt{D(\tau)} g(\tau) \quad (5.17)$$

$$F(\tau) = \frac{G'(\tau) + B(\tau) G(\tau)}{D(\tau)} \quad (5.18)$$

Nun soll die DGL (5.16) am Beispiel von O^{16} diskutiert werden. Die Parameter des Woods-Saxon-Potentials werden folgendermaßen gewählt

$$\begin{aligned} V_0 &= -60 \text{ MeV} \\ c &= 3 \text{ fm} \\ t &= 0,66 \text{ fm} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Die erstendrei Terme auf der rechten Seite der DGL (5.16), nämlich $-\frac{D''(\tau)}{2D(\tau)}$, $\frac{3}{4} \frac{D'^2(\tau)}{D^2(\tau)}$ und $\frac{D'(\tau)}{D(\tau)} \frac{\chi}{\tau}$, sind in Abb.5 geplottet. $\frac{C(\tau)}{\tau^2}$ und $D(\tau) H(\tau)$ sind in Abb.6 gezeichnet. Durch Vergleich mit Abb.5 sieht man, daß die Terme in Abb.6 diejenigen der Abb.5 um einige Größenordnungen übertreffen. Die drei Terme

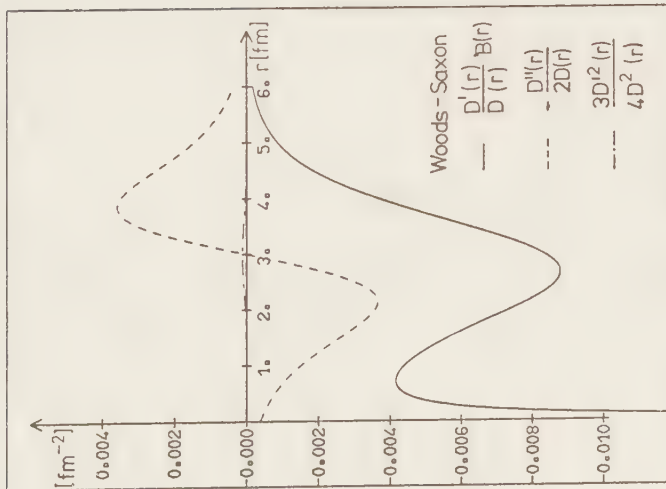


Abb. 5

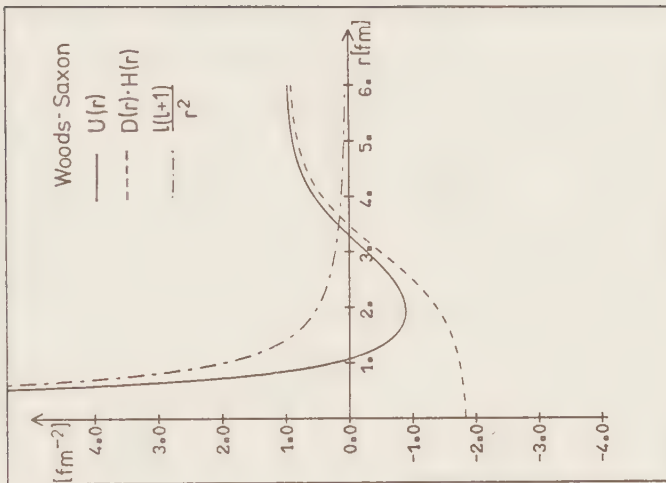


Abb. 6

Abb. 5 und Abb. 6: Die Bestandteile der DGL (5.16) sind für O^{16} als Funktion von r aufgetragen.

der Abb.5 sind, wie wir gleich sehen werden, rein relativistischer Natur. Sie sind für die Dirac-Gleichung mit Woods-Saxon-Potential vernachlässigbar. In Abb.6 ist außerdem noch

$$U(r) \equiv - \frac{D''(r)}{2 D(r)} + \frac{3 D'^2(r)}{4 D^2(r)} + \frac{D'(r)}{D(r)} \frac{x}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + D(r) H(r) \quad (5.20)$$

bezeichnet. $U(r)$ ist das sogenannte effektive Potential.

Um die einzelnen Terme der DGL (5.16) besser verstehen

zu können, wollen wir den nichtrelativistischen Grenz-

fall der Gleichung (5.16) betrachten. Die Terme $-\frac{D''(r)}{2 D(r)}$,

$\frac{3 D'^2(r)}{4 D^2(r)}$ und $\frac{D'(r)}{D(r)} \frac{x}{r}$ sind, wie wir gesehen haben, klein

im Vergleich zu den restlichen Termen. Sie sind deshalb ver-

nachlässigbar. Die verbleibende DGL lautet dann

$$\begin{aligned} g''(r) &= g(r) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + D(r) H(r) \right] = \\ &= g(r) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + (M + E_{R_1} + V_{ws}(r))(M - E_{R_1} + V_{ws}(r)) \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

Unter Verwendung von

$$E_{R_1} := M - |E_B| \quad (5.22)$$

wird aus der DGL (5.21) im nichtrelativistischen Grenzfall

$$g''(r) = g(r) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + 2M (V_{ws}(r) + |E_B|) \right] \quad (5.23)$$

(5.23) ist die Schrödinger-Gleichung für gebundene Zustände. Üblicherweise schreibt man sie folgendermaßen:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V(r) - E \right] g(r) = 0 \quad (5.24)$$

Da uns die Vernachlässigung der Terme $-\frac{D''(r)}{2D(r)} + \frac{3}{4} \frac{D'(r)}{D^2(r)} + \frac{D'(r)}{D(r)} \frac{x}{r}$ auf die Schrödinger-Gleichung führte, sind diese drei Terme relativistischen Ursprungs.

Die numerische Lösung der DGL (5.16) für ^{16}O mit den Potentialparametern (5.19) ergab folgende Bindungsenergien

$$\begin{aligned} E_{1s1/2} &= -36.03 \text{ MeV} \\ E_{1p3/2} &= -19.66 \text{ MeV} \\ E_{1p1/2} &= -19.44 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Wir haben eine geringe $1s$ -Aufspaltung, die rein relativistischen Ursprungs ist. In Abb.7 sind die großen Komponenten der Wellenfunktion aufgetragen. $G_{1p3/2}(r)$ und $G_{1p1/2}(r)$ unterscheiden sich nicht. Bei den kleinen Komponenten, die in Abb.8 zu sehen sind, ist ein großer Unterschied zwischen $F_{1p3/2}(r)$ und $F_{1p1/2}(r)$. $F_{1p1/2}$ hat nämlich einen Knoten. In Abb.9 sind nochmals alle großen und kleinen Komponenten der drei Wellenfunktionen aufgetragen. Es zeigt sich, daß die großen Komponenten ca. zehnmal so groß sind wie die kleinen Komponenten.

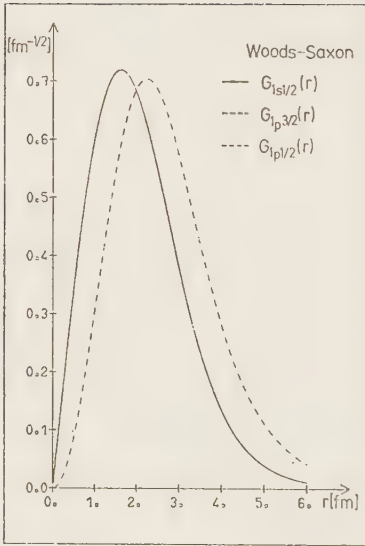


Abb. 7

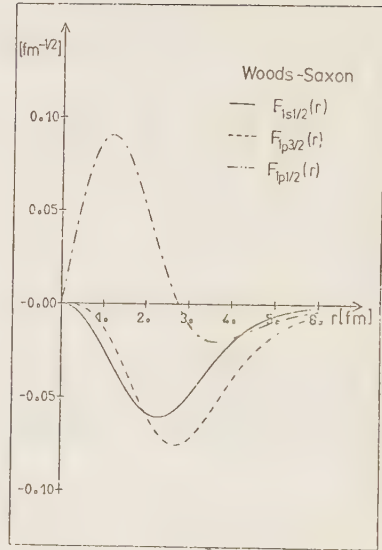


Abb. 8

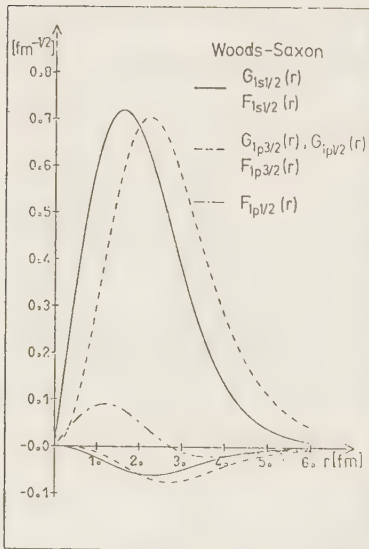


Abb. 9

Abb. 7, 8, 9:

Ortsabhängigkeit der
 "Woods-Saxon-Vierer-
 Spinoren" für O^{16} . Die
 Parameter des Woods-
 Saxon-Potentials (5.3)
 sind: $V_0 = -60$ MeV
 $c = 3$ fm
 und $t = 0.60$ fm

V. 1.2 "Oszillator-Viererspinoren"

Man könnte analog zu (V.1.1) vorgehen und zur Masse in der Dirac-Gleichung ein Oszillatorpotential schreiben. Dies ist jedoch nicht sehr sinnvoll, da dann die relativistischen Oszillatorwellenfunktionen ein sehr schlechtes asymptotisches Verhalten ($\sim \exp(-\beta r^3)$; β ist eine Konstante) aufweisen.

Aus diesem Grunde geht man anders vor:

Man baut ein Wellenpaket mit den relativistischen freien Viererspinoren

$$\begin{pmatrix} v_{\mu, \mu} \\ \frac{\underline{\epsilon} \cdot \underline{k}}{2M} v_{\mu, \mu} \end{pmatrix} e^{i \underline{k} \cdot \underline{z}} \quad (5.26)$$

indem man an diesen Viererspinor die Impulsverteilung eines nichtrelativistischen harmonischen Oszillators (mit der imaginären Einheit i multipliziert) faltet und zu gutem Gesamtdrehimpuls koppelt.

Man erhält:

$$\begin{aligned} f_{\mu, \mu}(\underline{z}) &= \begin{pmatrix} \frac{i G_{\mu, \mu}(\tau)}{\tau} & \varphi_{\mu, \mu}(\hat{\tau}) \\ \frac{F_{\mu, \mu}(\tau)}{\tau} & \underline{\epsilon} \cdot \hat{\tau} \varphi_{\mu, \mu}(\hat{\tau}) \end{pmatrix} = \\ &= N_{\mu, \mu} \sum_{\mu, \mu'} (e^{\mu \frac{1}{2} \mu'} | g_{\mu}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k e^{i \underline{k} \cdot \underline{z}} i S_{\mu, \mu}(\underline{k}) Y_{\mu, \mu}(\hat{\underline{k}}) \begin{pmatrix} v_{\mu, \mu'} \\ \frac{\underline{\epsilon} \cdot \underline{k}}{2M} v_{\mu, \mu'} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.27)$$

N_{e_j} ist eine Normierungskonstante, die so zu bestimmen ist, daß $\int f_{n,e_j}^*(z) f_{n,e_j}(z) d^2\tau = 1$ ist. $S_{n,e}(k) Y_{e,\mu}(\hat{k})$ ist die Wellenfunktion des nichtrelativistischen harmonischen Oszillators im Impulsraum:

$$S_{n,e}(k) = (-i)^e (-1)^{n-1} \left[\frac{2 \cdot (n-1)!}{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})} R^3 \right]^{\frac{1}{2}} (kR)^e \exp\left(-\frac{k^2 R^2}{2}\right) \times \\ \times L_{n-1}^{\ell+1/2}(k^2 R^2) \quad (5.28)$$

($L_{n-1}^{1+1/2}$ sind die Laguerre-Polynome)

Setzt man (5.28) in (5.27) ein, so erhält man:

$$\frac{i G_{e_j}(\tau)}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2M}\right)^2 \frac{1}{R^2} (2(n-1) + \ell + \frac{1}{2})}} \left[\frac{2(n-1)!}{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2}) R^3} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times i \left(\frac{\tau}{R}\right)^e \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\tau^2}{R^2}\right) L_{n-1}^{\ell+1/2}\left(\frac{\tau^2}{R^2}\right) \quad (5.29a)$$

Für $j = 1 + 1/2$

$$\frac{F_{n,e_j}(\tau)}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2M}\right)^2 \frac{1}{R^2} (2(n-1) + \ell + \frac{1}{2})}} \left[\frac{2(n-1)!}{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2}) R^3} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times i^{2\ell+2} (-1)^e \frac{1}{2M} \frac{1}{R} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2R^2}\right) \left(\frac{\tau}{R}\right)^{e+1} \times \\ \times \left[L_{n-1}^{\ell+1/2}\left(\frac{\tau^2}{R^2}\right) + L_{n-2}^{\ell+1/2}\left(\frac{\tau^2}{R^2}\right) \right] \quad (5.29b)$$

Für $j = 1 - 1/2$

$$\frac{F_{n,e_j}(\tau)}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2M}\right)^2 \frac{1}{R^2} (2(n-1) + \ell + \frac{1}{2})}} \left[\frac{2(n-1)!}{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2}) R^3} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times i^{2\ell} (-1)^e \frac{1}{2M} \frac{1}{R} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2R^2}\right) \left(\frac{\tau}{R}\right)^{e-1} \times \\ \times \left[(n + \ell - \frac{1}{2}) L_{n-1}^{\ell-1/2}\left(\frac{\tau^2}{R^2}\right) + n L_{n-2}^{\ell-1/2}\left(\frac{\tau^2}{R^2}\right) \right] \quad (5.29c)$$

R = Oszillatorparameter

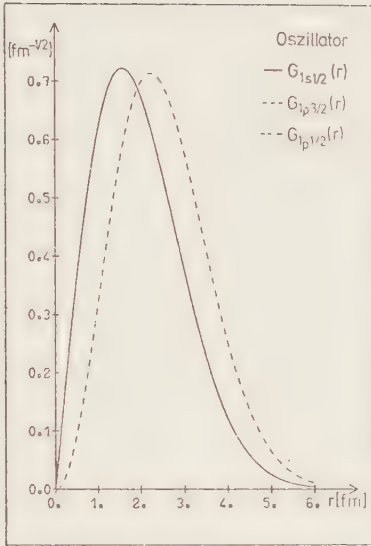


Abb.10

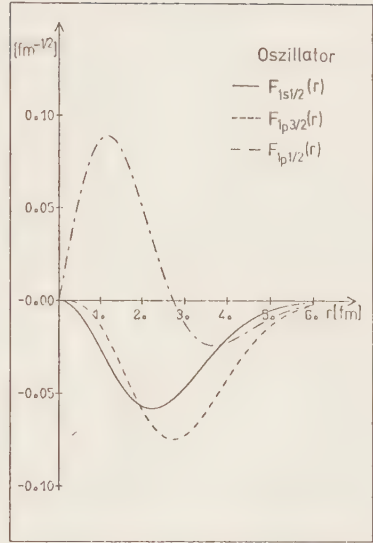


Abb.11

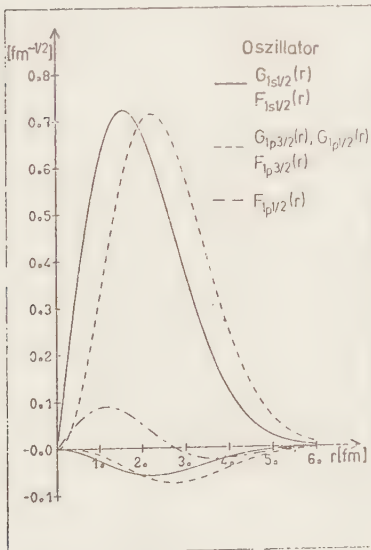


Abb.12

Abb.10,11,12:

Ortsabhängigkeit der "Oszillator-Viererspinoren" für O^{16} . Die Parameter des Oszillator-Potentials

$$V_{O_{12}}(r) = -V_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

sind: $V_0 = 57.32 \text{ MeV}$

$$R = 4.35 \text{ fm}$$

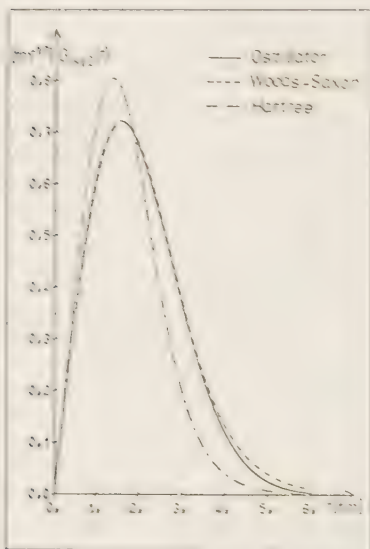


Abb.13

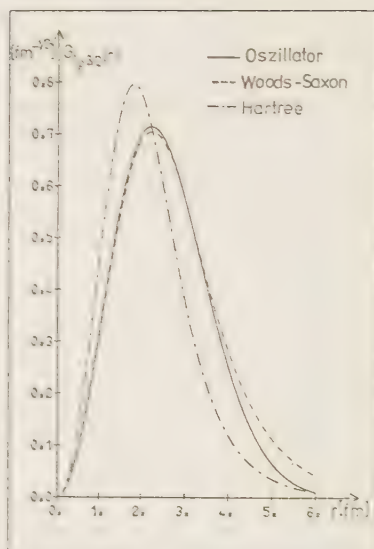


Abb.14

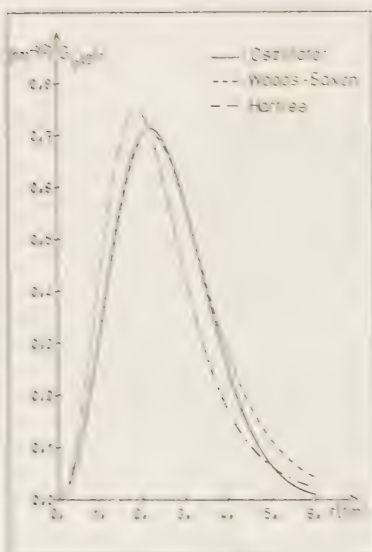


Abb.15

Abb.13,14,15:

Die großen Komponenten des "Woods-Saxon-Viererspinors", des "Oszillator-Viererspinors" und des "Hartree-Viererspinors" nach der elften Iteration werden für die verschiedenen Niveaus von O^{16} miteinander verglichen.

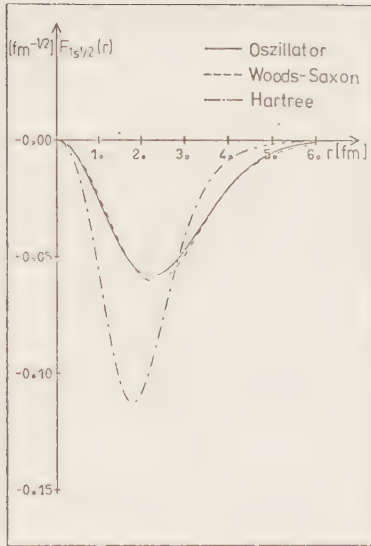


Abb.16

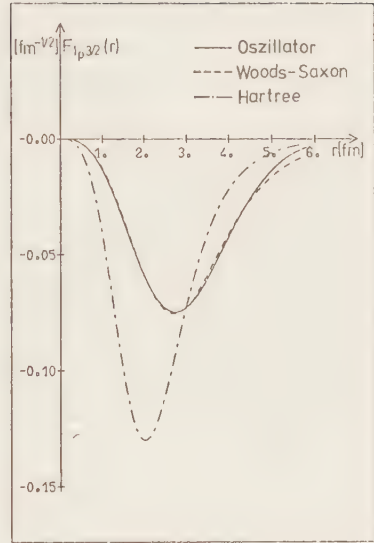


Abb.17

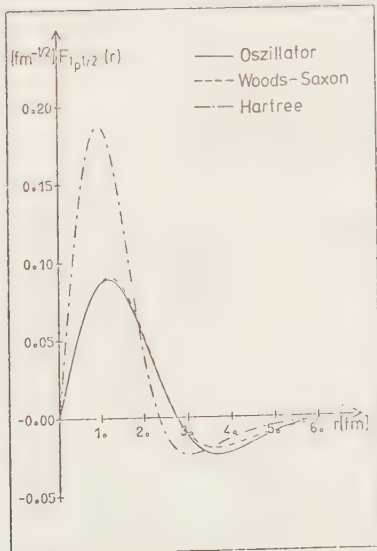


Abb.18

Abb.16,17,18:

Vergleich zwischen den kleinen Komponenten des "Woods-Saxon-Viererspinors", des "Oszillator-Viererspinors" und des "Hartree-Viererspinors" nach der elften Iteration für die verschiedenen Energieniveaus von 0^{16} .

Für O^{16} sind diese Wellenfunktionen in Abb.10 bis Abb.12 geplottet. Als Oszillatorparameter wurde

$$R = A^{1/6} \text{ fm} = 1.58 \text{ fm}$$

verwendet. Da das Oszillatorpotential mit diesem Wert für R dem Woods-Saxon-Potential sehr ähnlich ist, sollten sich auch die entsprechenden Wellenfunktionen der beiden Potentiale gleichen. In Abb.13 bis 18 erkennt man, daß das auch tatsächlich der Fall ist. Dies ist ein Beweis für die Richtigkeit des komplizierten numerischen Programms zur Lösung der Dirac-Gleichung.

V. 2 Numerische Lösung der Hartree-Gleichungen

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie man die Hartree-Gleichungen numerisch lösen kann. Dies soll am Beispiel von O^{16} durchgeführt werden. Alle Potentiale, Wellenfunktionen, Energien usw in diesem Abschnitt beziehen sich also auf O^{16} . Das soll nicht laufend wiederholt werden.

Um die Hartree-Gleichungen zu lösen, muß man zunächst mit Startwellenfunktionen für $G(r)$ und $F(r)$, die Potentiale $V_{R_1}^c(r)$, $V_{R_1}^s(r)$ und $V_{R_2}^u(r)$ (4.43) ausrechnen. Hierzu muß man Integralfunk-

tionen der Form

$$Y(x) = Y(x_0) + \int_{x_0}^x y(f) df$$

an den Äquidistanten Stellen $x_n = x_0 + nh$ ($n=1,2,\dots,N$) berechnen. Zur Berechnung einer Integralfunktion an den Stellen x_n für $n = 2, \dots, N$ verwendet man am besten die Simpson-Formel. An der Stelle x_1 kann man die Simpson-Regel nicht verwenden. Hier bietet sich eine Kombination der $\frac{3}{8}$ -Regel und der Simpson-Regel an (Zur 65).

$$Y(x_2) = Y(x_0) + \frac{h}{48} (17 Y(x_0) + 42 Y(x_1) - 16 Y(x_2) + 6 Y(x_3) - Y(x_4))$$

Wir wollen folgende Abkürzungen einführen:

$$V_{R_1}(\tau_1) \equiv V_{R_1}^r(\tau_1) + V_{R_1}^w(\tau_1) + V_{R_1}^s(\tau_1) \quad (5.30)$$

$$W_{R_1}(\tau_1) \equiv V_{R_1}^r(\tau_1) - V_{R_1}^w(\tau_1) - V_{R_1}^s(\tau_1) \quad (5.31)$$

Die durchgezogene Kurve in Abb.19 ist das Potential $V_{1s1/2}^{(1)}(r)$, welches mit den "Woods-Saxon-Viererspinoren" von Kapitel (V.1.1) als Startwellenfunktionen berechnet worden ist. Wir haben dieses Potential Hartree-Potential erster Ordnung genannt, weil es das Potential der ersten Iteration ist. Es soll auch mit $V_{1s1/2}^{(w)}(r)$ bezeichnet werden. Analog ist die durchgezogene Kurve in Abb.25 das Potential $W_{1s1/2}^{(w)}(r)$. Es wurde mit denselben Woods-Saxon-Viererspinoren ausgerechnet. Auffallend ist die ungeheure Tiefe dieses Potentials. Der Grund dafür wird später erläutert.

Wenn die Potentiale $V_{R_1}^{(0)}(r_1)$ und $W_{R_1}^{(0)}(r_1)$ bekannt sind, dann kann man die Hartree-Gleichungen (4.42) mit demselben Verfahren lösen, das wir in Kapitel (V.1.1) verwendet haben, um die "Woods-Saxon-Viererspinoren" auszurechnen. Der einzige Unterschied liegt in der Definition der Größen $H(r)$ (5.6) und $D(r)$ (5.7). Zur Lösung der Dirac-Gleichung mit Woods-Saxon-Potential setzen wir

$$H(\psi) = M - E_{R_1} + V_{R_1}(\psi) \quad (5.6)$$

$$D(\psi) = M + E_{R_1} + V_{R_1}(\psi) \quad (5.7)$$

Zur Lösung der Hartree-Gleichungen definieren wir

$$H(\psi) = M - E_{R_1} + V_{R_1}(\psi) \quad (5.32)$$

$$D(\psi) = M + E_{R_1} + W_{R_1}(\psi) \quad (5.33)$$

Beim ersten Iterationsschritt werden also die Hartree-Gleichungen mit den Potentialen $V_{R_1}^{(0)}(r_1)$ und $W_{R_1}^{(0)}(r_1)$ gelöst. Wir erhalten Wellenfunktionen und Einteilchenenergien. Beim nächsten Iterationsschritt berechnet man mit den Wellenfunktionen der ersten Iteration neue Potentiale, nämlich $V_{R_1}^{(1)}(r_1)$ und $W_{R_1}^{(1)}(r_1)$. Mit diesen Potentialen geht man in die Hartree-Gleichungen ein, löst sie wieder und erhält neue Wellenfunktionen und Energien usw. Dies wurde solange durchgeführt bis sich die Summe der Einteilchenenergien zweier aufeinanderfolgender Iterationen um weniger als ein zehntel MeV unterschieden. Um dies zu erreichen, mußte man elfmal iterieren. Im nächsten Abschnitt sollen die Ergebnisse der Hartree-Rechnungen erläutert werden.

V.3 Resultate der Hartree-Rechnungen

Bei den konkreten Hartree-Rechnungen ist mit den Massen und Kopplungskonstanten von Tabelle 1 gerechnet worden, d.h. $\frac{g_r^2}{4\pi} = 6$, $\frac{g_\omega^2}{4\pi} = 10$, $\frac{g_\pi^2}{4\pi} = 0.5$. Außerdem ist der Formfaktor von Kapitel III.2 mit $\Lambda = \sqrt{2} M = 1329$ MeV verwendet worden.* Es sei hier erwähnt, daß das Hartree- bzw Hartree-Fock-Verfahren von Kapitel IV auch ohne Formfaktoren nicht divergiert. Diese Eigenschaft haben die meisten nichtrelativistischen Hartree-Fock-Rechnungen nicht. Da die Nukleonen aber ausgedehnt sind, wollen wir trotzdem mit einem Formfaktor rechnen. Nun sollen unsere Rechnungen diskutiert werden:

Die Potentiale $V_{1s1/2}(r)$ sind in Abb.19 bis Abb.21 graphisch dargestellt. Nach sieben Iterationen unterscheidet sich $V_{1s1/2}(r)$ nur noch sehr wenig von den nachfolgenden Potentialen. In Abb.22 sieht man, daß das endgültige Potential $V_{1s1/2}^{(11)}(r)$ eine Tiefe von ungefähr 100 MeV hat. Im Vergleich zum Woods-Saxon ist dieses Potential tiefer (40 MeV) und etwas schmaler (0.5 fm). Abb.23 zeigt die Beiträge des π -, ω - und ρ -Mesons zum Hartree-Potential $V_{1s1/2}^{(11)}(r)$. Auffallend ist die enorme Stärke des attraktiven Potentials herrührend vom π -Meson. Es ist ca 400 MeV tief. Ähnliches gilt für das repulsive Potential des ω -Mesonen-Austausches. Seine Stärke ist ca 300 MeV. Demgegenüber ist das ρ -Meson vernachlässigbar (Es ist 4 MeV stark und repulsiv). Die Zustandsabhängigkeit des Potentials $V^{(11)}(r)$ findet man in Abb.24 veranschaulicht. Bei $r=0$ ändert sich das Potential $V^{(11)}(r)$ um ca.10%

* Dieser Formfaktor ist mit den Zwei-Nukleonen-Daten verträglich. Zur Sensitivität unserer Endergebnisse auf den Formfaktor siehe Tabelle 2.

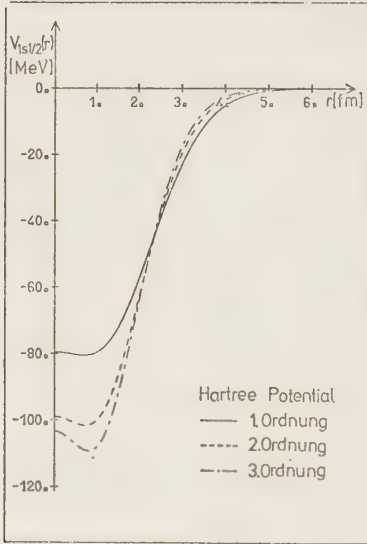


Abb.19

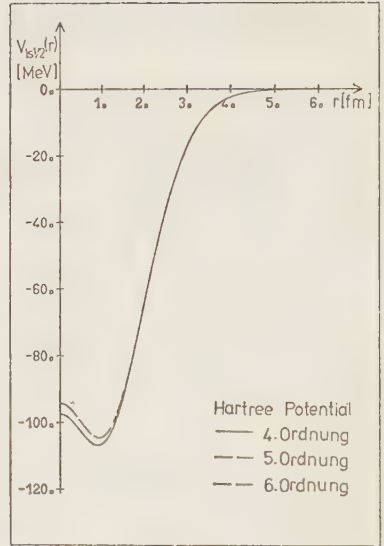


Abb.20

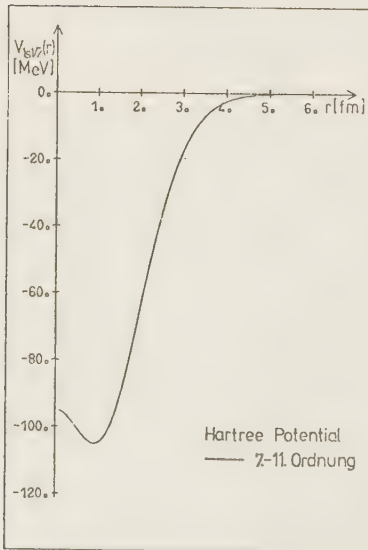


Abb.21

Abb.19,20,21:

Das Hartree-Potential der einzelnen Iterationen (Ordnungen) ist für den 1s_{1/2}-Zustand von 0^{16} geplottet.

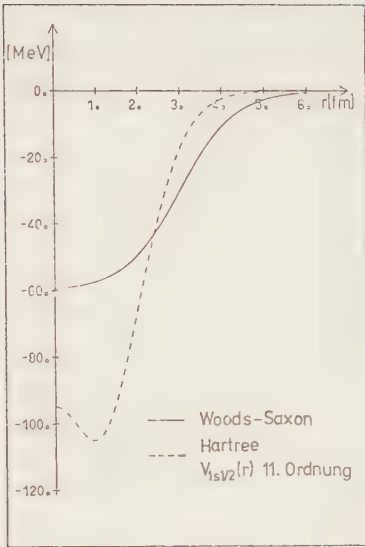


Abb.22

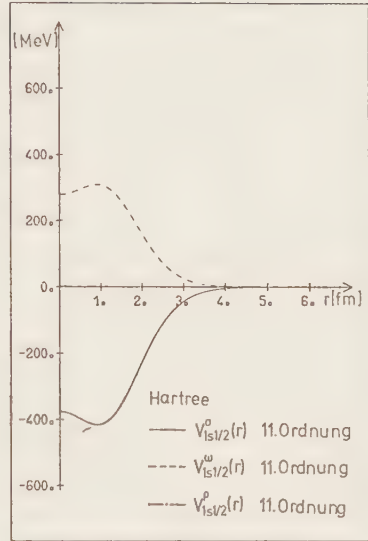


Abb.23

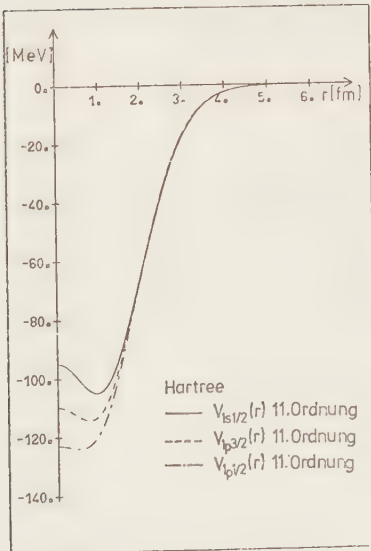


Abb.24

Abb.22:

Vergleich zwischen dem Woods-Saxon-Potential und dem Hartree-Potential des $1s_{1/2}$ -Zustandes der elften Iteration für O^{16} .

Abb.23:

Beiträge des σ , ρ und ω -Mesons zum Hartree-Potential der elften Iteration für den $1s_{1/2}$ -Zustand von O^{16} .

Abb.24:

Zustandsabhängigkeit des Hartree-Potentials der elften Iteration für O^{16} .

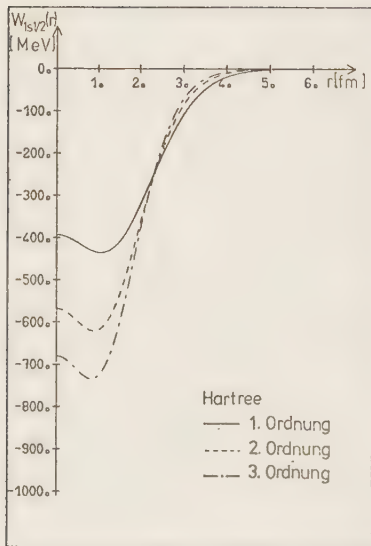


Abb.25

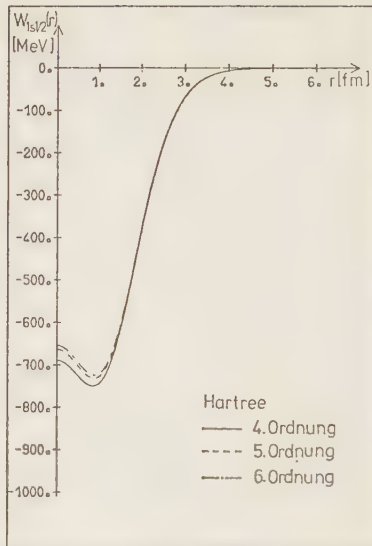


Abb.26

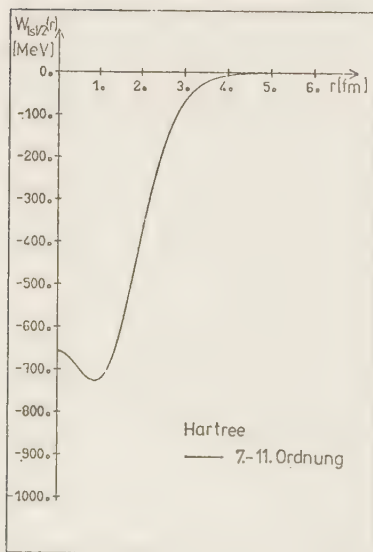


Abb.27

Abb.25,26,27:

Darstellung der einzelnen Iterationen des Potentials $W_{1s1/2}(r)$ für den 1s1/2-Zustand von O^{16} .

von Zustand zu Zustand. Dies ist erwartungsgemäß nicht sehr viel. In Abb.25 bis Abb.27 ist $W_{1s1/2}(r)$ für die einzelnen Iterationen geplottet. Da ja definitionsgemäß

$$W_{R_1}(\tau) = V_{R_1}^r(\tau) - V_{R_1}^w(\tau) - V_{R_1}^s(\tau)$$

ist, muß $W_{R_1}(r)$ nach Abb.23 von beträchtlicher Stärke sein. Das Potential $W_{R_1}(r)$ ist attraktiv und konvergiert nach sechs Iterationen gegen ein Potential von 700 MeV Tiefe. Dies ist äußerst wichtig und bewirkt, daß die kleine Komponente in der Hartree-Gleichung (4.42a) sehr wichtig wird. Das hat zur Folge, daß die relativistischen Effekte groß sind, was wir später sehen werden. Abb.28 zeigt die Zustandsabhängigkeit des Potentials $W^{(11)}(r)$.

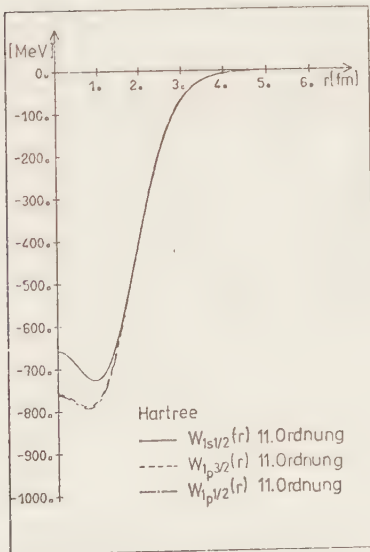


Abb.28:

Zustandsabhängigkeit des Potentials $W(r)$ der elften Hartree-Iteration für O^{16} .

Abb.28

Man erkennt sofort, daß $W_{R_1}(r)$ keinen Term enthält, der Spin-Bahn-Aufspaltung bewirkt ($W_{1p3/2}^{(11)}(r)$ und $W_{1p3/2}^{(11)}(r)$ sind gleich.). Da aber

$$V_{R_1}(\tau) = V_{R_1}^r(\tau) + V_{R_1}^w(\tau) + V_{R_1}^s(\tau)$$

(s. Abb. 24) Spin-Bahn-Aufspaltung zeigt, tragen $V^r(r)$ und $V^w(r)$ gleich stark und mit demselben Vorzeichen zur Spin-Bahn-Aufspaltung von $V_{R_1}(r)$ bei ($V^s(r)$ ist ja vernachlässigbar klein.). Den entscheidenden Beitrag zur Spin-Bahn-Aufspaltung liefert aber der rein relativistische Term

$$\frac{D'(\tau)}{D(\tau)} B(\tau) = \frac{W_{R_1}'(\tau)}{M + E_{R_1} + W_{R_1}(\tau)} \frac{x}{r} = - \frac{W_{R_1}'(\tau)}{M + E_{R_1} + W_{R_1}(\tau)} (\ell \pm 1)$$

in der DGL (5.16). Dieser Term ist in Abb. 20 für das $1p3/2$ -Niveau der elften Iteration dargestellt. Den entsprechenden Term für das $1p1/2$ -Niveau findet man in Abb. 29a. Es zeigt sich, daß der Term $\frac{D'(\tau)}{D(\tau)} B(\tau)$ für das $1p1/2$ -Niveau schwächer ist als für das $1p3/2$ -Niveau. Außerdem hat $\frac{D'(\tau)}{D(\tau)} B(\tau)$ für das $1p3/2$ -Niveau das entgegengesetzte Vorzeichen wie für das $1p1/2$ -Niveau. In Abb. 30 bzw. 30a sind die Terme $U(r)$ und $D(r) \cdot H(r)$ für das $1p3/2$ - bzw. $1p1/2$ -Niveau gezeichnet. Um $U(r)$ für das $1p3/2$ - bzw. $1p1/2$ -Niveau nach der elften Iteration besser miteinander vergleichen zu können, wurde $U(r)$ für die beiden p-Niveaus in Abb. 30b nochmals gezeichnet. Man erkennt den Unterschied in der Asymptotik ($r \rightarrow \infty$) und in der Tiefe der "Potentiale".

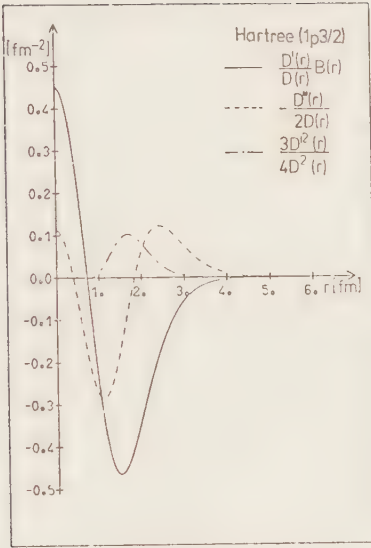


Abb. 29

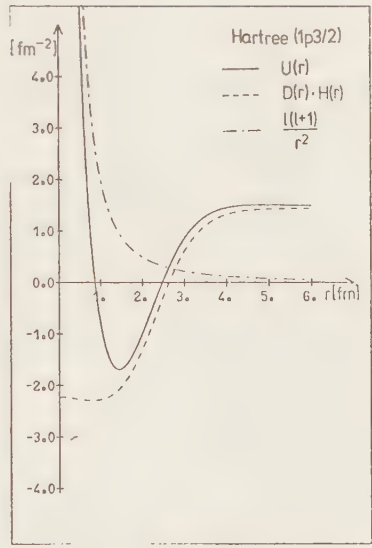


Abb. 30

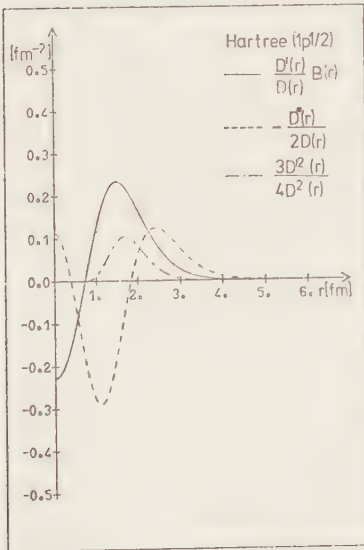


Abb. 29a

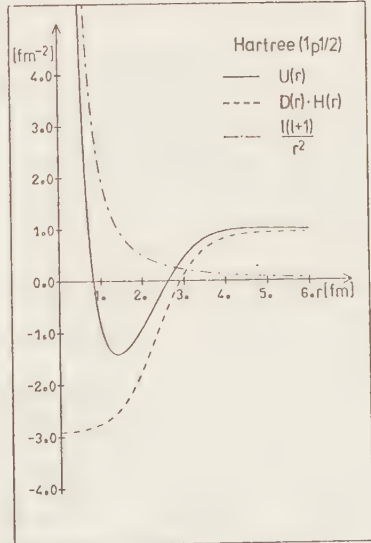


Abb. 30a

Abb. 29, 29a, 30, 30a:

Bestandteile der DGL (5.16) mit dem Hartree-Potential der elften Iteration für das $1p_{3/2}$ - bzw $1p_{1/2}$ -Niveau von 0^{16} .

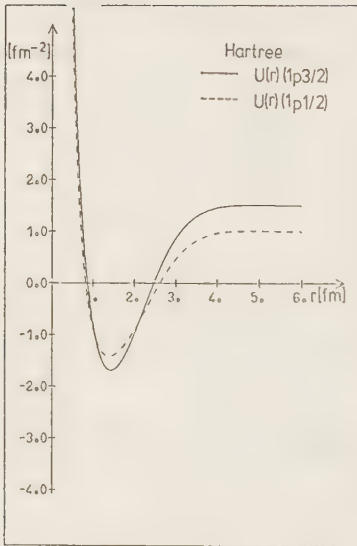


Abb.30b

Abb.30b:

$U(r)$ für das $1p_{3/2}$ - bzw $1p_{1/2}$ -Niveau von O^{16} nach der elften Iteration.

Abb.33 zeigt $\frac{D'(r)}{D(r)} B(r)$ des $1p_{3/2}$ -Niveaus für das Woods-Saxon-Potential bzw Hartree. Man sieht deutlich, daß das l-s-Potential der Hartree-Näherung viel stärker ist als bei der relativistischen Rechnung mit dem Woods-Saxon-Potential.

Die Hartree-Rechnung ergab dann auch eine l-s-Aufspaltung von 10 MeV, während die Rechnung mit dem Woods-Saxon-Potential nur eine l-s-Aufspaltung von 0.2 MeV brachte.

Die einzelnen Bestandteile der DGL (5.16) für Hartree bei der elften Iteration sind in Abb.29 und Abb.30 für das $1p_{3/2}$ -Niveau aufgetragen. Es zeigt sich wiederum, daß die Terme

$$-\frac{D''(r)}{2D(r)}, \frac{3}{4} \frac{D'^2(r)}{D^2(r)} \quad \text{und} \quad \frac{D'(r)}{D(r)} B(r) \quad \text{kleiner sind als} \quad \frac{C(C+1)}{r^2}$$

und $D(r)H(r)$. Aber der Unterschied ist nicht mehr so groß wie

bei der DGL für den Woods-Saxon. In Abb.31 bis Abb.36 werden diese einzelnen Terme für das $1p_{3/2}$ -Niveau von O^{16} unter Verwendung des Hartree- und des Woods-Saxon-Potentials verglichen. Am stärksten ist der Unterschied bei den rein relativistischen Termen $-\frac{D'(\tau)}{2 D(\tau)} + \frac{3 D''(\tau)}{4 D^3(\tau)}$ und $\frac{D'(\tau)}{D(\tau)} B(\tau)$. In Abb.32 ist $\frac{3 D''(\tau)}{4 D^3(\tau)}$ nur für Hartree zu sehen. Für den Woods-Saxon ist diese Funktion so klein, daß sie auf der Zeichnung nicht erkennbar ist.

In Abb.37 bis Abb.39 sind die Wellenfunktionen gezeichnet, die sich bei der elften Iteration ergaben. Die Abb.13 bis Abb.18 zeigen einen Vergleich der Hartree-Wellenfunktionen mit den Oszillator- bzw Woods-Saxon-Wellenfunktionen. Da das Hartree-Potential tiefer und schmaler als das Woods-Saxon- bzw Oszillator-Potential ist, sind die Wellenfunktionen für das Hartree-Potential zu $r = 0$ verschoben und steiler als die entsprechenden Woods-Saxon- bzw Oszillatorwellenfunktionen.

Als Einteilchenenergien ergab sich nach den elf Iterationen ($E_{A_i} = M + E_{A_i}^B$):

$$\begin{aligned} E_{1s1/2}^B &= - 59.93 \text{ MeV} \\ E_{1p3/2}^B &= - 30.42 \text{ MeV} \quad (5.34) \\ E_{1p1/2}^B &= - 19.67 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Aus (p,2p)- und (e,e'p) - Experimenten erhält man folgende experimentellen Separationsenergien für die Protonen

$$\begin{aligned} E_{1s1/2}^S &= - 38 \pm 4 \text{ MeV} \\ E_{1p3/2}^S &= - 18.5 \pm 0.5 \text{ MeV} \quad (5.35) \\ E_{1p1/2}^S &= - 12.2 \pm 0.2 \text{ MeV} \end{aligned}$$

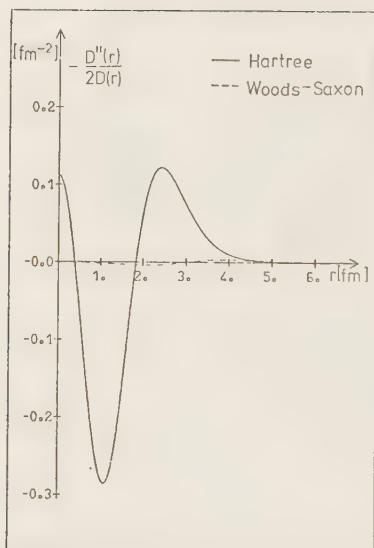


Abb.31

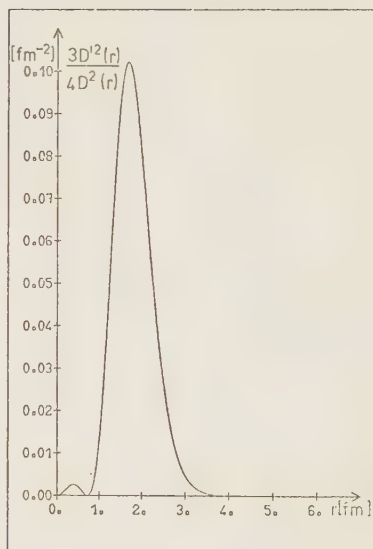


Abb.32

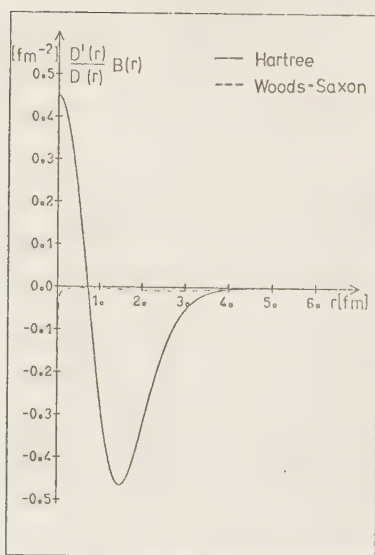


Abb.33

Abb.31,32,33:

Für O^{16} werden die Bestandteile der DGL (5.16) für das $1p_{3/2}$ Niveau des Woods-Saxon- bzw Hartree-Potentials der elften Iteration miteinander verglichen.

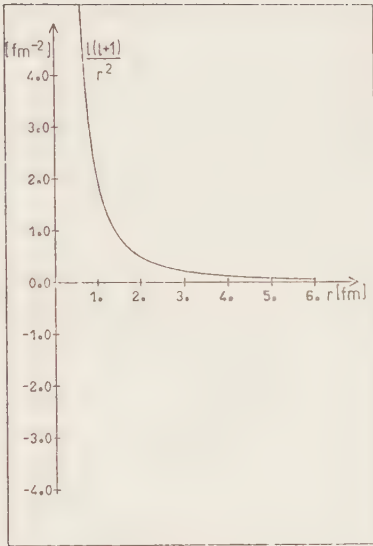


Abb. 34

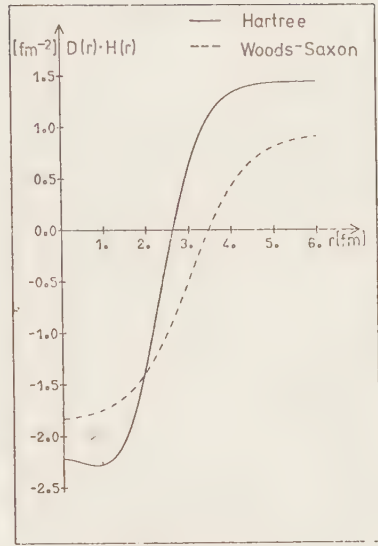


Abb. 35

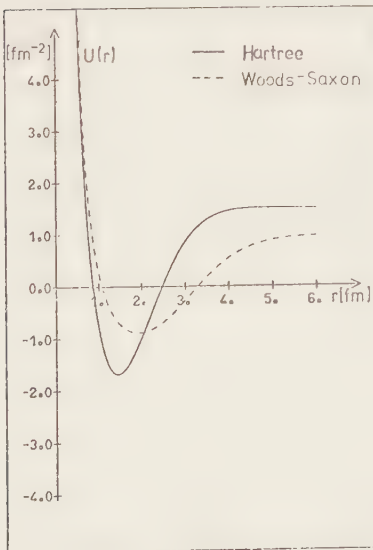


Abb. 36

Abb. 34, 35, 36:

Für 0^{16} werden die Bestandteile der DGL (5.16) für das $1p_{3/2}$ Niveau des Woods-Saxon- bzw Hartree-Potentials der elften Iteration miteinander verglichen.

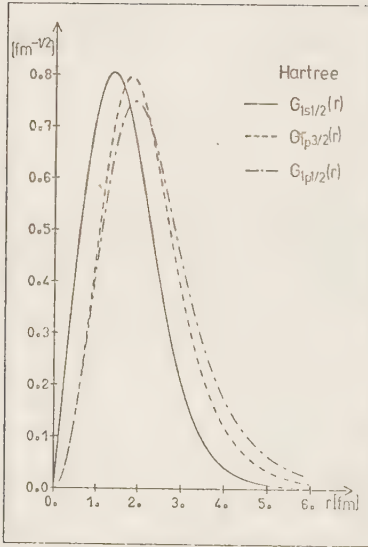


Abb.37

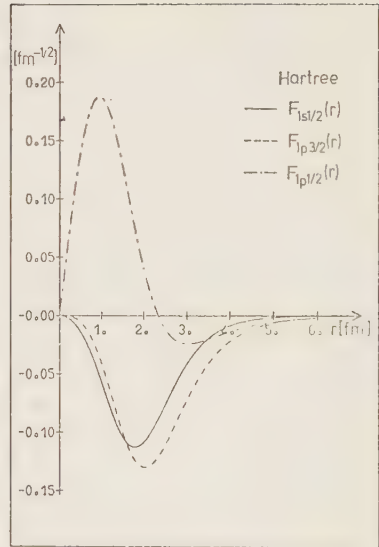


Abb.38

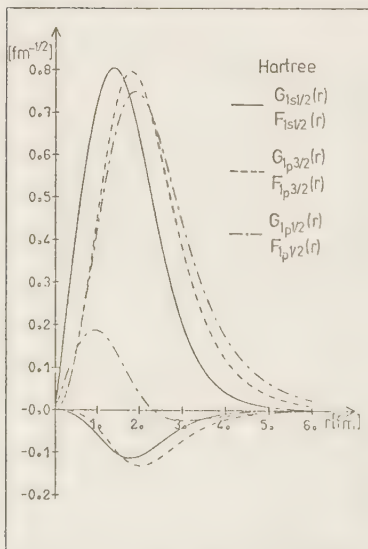


Abb.39

Abb.37,38,39:

Ortsabhängigkeit der "Hartree-Viererspinoren" für O^{16} nach der elften Iteration.

Die hier aufgeführten Separationsenergien wurden einer Arbeit von R.L.Becker entnommen (Be 70). Diese Zahlen gelten als Richtzahlen für die errechneten Einteilchenenergien. Wenn wir in unserem Modell noch die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen den Protonen einführen würden, dann ergäbe sich eine Anhebung der Einteilchenenergien von (5.34) um einige MeV. Außerdem sollte die Berücksichtigung des Austauschterms die Einteilchenenergien ebenfalls noch anheben. Das Ergebnis (5.34) ist überraschend gut. Das Auffallendste ist, daß die l-s-Aufspaltung in der richtigen Größenordnung liegt (5-10 MeV). Beim Woods-Saxon ergab sich nur eine l-s-Aufspaltung von 0.2 MeV. Die l-s-Aufspaltung ist ein rein relativistischer Effekt und würde beim Abschalten der kleinen Komponenten ganz verschwinden, d.h., daß die relativistischen Effekte in unserem Modell groß sind. Dies zeigt sich auch bei der Berechnung der Bindungsenergie pro Nukleon!

Dafür berechnen wir zunächst die Grundzustandsenergie E_0^{HF} des A Nukleonensystems in der Hartree-Fock-Näherung. Hierzu schreiben wir die Gleichung (4.2) schematisch:

$$E_0^{HF} = \sum_{\alpha=1}^A \langle \alpha | T | \alpha \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^A [\langle \alpha \alpha' | V | \alpha \alpha' \rangle - \langle \alpha' \alpha | V | \alpha \alpha' \rangle] \quad (5.36)$$

Für die Einteilchenenergien gilt in dieser Schreibweise

$$E_\lambda = \langle \lambda | T | \lambda \rangle + \sum_K [\langle \lambda \lambda | V | \lambda \lambda \rangle - \langle \lambda \lambda | V | \lambda \lambda \rangle] \quad (5.37)$$

Setzen wir diesen Ausdruck für die Einteilchenenergien in (5.36) ein, so ergibt sich schließlich:

$$E_0^{HF} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^A (E_\alpha + \langle \alpha | T | \alpha \rangle) \quad (5.38)$$

Mit dem expliziten Ausdruck für die kinetische Energie (F.6) von Anhang F erhalten wir für die Grundzustandsenergie in der Hartree-Fock-Näherung

$$E_0^{HF} = \sum_{R_1} \hat{I}_1^2 \left[E_{R_1} + \int d\tau_1 \left\{ G_{R_1}(\tau_1) \left[M G_{R_1}(\tau_1) - \frac{d}{d\tau_1} F_{R_1}(\tau_1) + \frac{x_1}{\tau_1} F_{R_1}(\tau_1) \right] \right. \right. \\ \left. \left. + F_{R_1}(\tau_1) \left[\frac{d}{d\tau_1} G_{R_1}(\tau_1) + \frac{x_1}{\tau_1} G_{R_1}(\tau_1) - M F_{R_1}(\tau_1) \right] \right\} \right] \quad (5.39)$$

Mit Hilfe der Hartree-Gleichungen (4.42) bekommen wir für die Grundzustandsenergie in der Hartree-Näherung

$$E_0^H = \sum_{R_1} \hat{I}_1^2 \left[E_{R_1} + \int_0^\infty d\tau_1 \left\{ G_{R_1}^1(\tau_1) \left[E_{R_1} - V_{R_1}^r(\tau_1) - V_{R_1}^w(\tau_1) - V_{R_1}^s(\tau_1) \right] \right. \right. \\ \left. \left. + F_{R_1}^2(\tau_1) \left[E_{R_1} + V_{R_1}^r(\tau_1) - V_{R_1}^w(\tau_1) - V_{R_1}^s(\tau_1) \right] \right\} \right] \quad (5.40)$$

Unter Verwendung der Definition $E_{R_1} = M + E_{R_1}^B$ ergibt sich dann für die Bindungsenergie pro Nukleon in der Hartree Näherung

$$E^B/A = 2 \sum_{R_1} \hat{I}_1^2 E_{R_1}^B/A + \sum_{R_1} \hat{I}_1^2 \int d\tau_1 \left\{ G_{R_1}^1(\tau_1) \left[-V_{R_1}^r(\tau_1) - V_{R_1}^w(\tau_1) - V_{R_1}^s(\tau_1) \right] \right. \\ \left. + F_{R_1}^2(\tau_1) \left[V_{R_1}^r(\tau_1) - V_{R_1}^w(\tau_1) - V_{R_1}^s(\tau_1) \right] \right\} / A \\ = 2 \sum_{R_1} \hat{I}_1^2 E_{R_1}^B/A - \sum_{R_1} \hat{I}_1^2 \int d\tau_1 G_{R_1}^2(\tau_1) V_{R_1}(\tau_1)/A + \\ + \sum_{R_1} \hat{I}_1^2 \int d\tau_1 F_{R_1}^2(\tau_1) W_{R_1}(\tau_1)/A \quad (5.41)$$

Da $W_{\pi}(\tau_1)$ 700 MeV bis 800 MeV tief ist und $F_{1p1/2}(r)$ für kleine Werte von r größer ist als $G_{1p1/2}(r)$ (Abb.39), ist der letzte Term in (5.41) sicher wichtig. Dieser Term ist aber ein rein relativistischer Effekt. Für O^{16} ergab sich für die Bindungsenergie pro Nukleon

$$E^B/A = - 5.82 \text{ MeV}$$

Experimentell bekommt man

$$E^B/A = - 7.98 \text{ MeV}$$

Als mittlerer, quadratischer Radius r ergab sich für O^{16} in unserem Modell

$$r = 2 \text{ fm}$$

Experimentell erhält man für O^{16} den Wert (Lan 67)

$$r = 2.73 \text{ fm.}$$

Die Empfindlichkeit unserer Endergebnisse auf die Kopplungskonstanten, den Formfaktor und die Masse des σ -Mesons ist in Tabelle 2 dargestellt.

Geänderte Eingabedate	$E_{1s1/2}$ MeV	$E_{1p3/2}$ MeV	$E_{1p1/2}$ MeV	$E^{B/A}$ MeV	r fm	Iterationen
$g_{\sigma}^{2*} = 5.4 (6.0)$	-	-	-	-	-	-
$g_{\sigma}^{2*} = 6.0$	- 59.9	- 30.4	- 19.6	- 5.8	2.0	11
$g_{\sigma}^{2*} = 6.6 (6.0)$	- 92.0	- 55.4	- 36.1	- 18.6	1.8	18
$g_{\omega}^{2*} = 9.0 (10.0)$	- 89.9	- 51.97	- 33.7	- 16.0	1.8	9
$g_{\omega}^{2*} = 11.0 (10.0)$	- 30.5	- 11.6	- 7.9	+ 1.0	2.5	9
$g_{\rho}^{2*} = 0.45 (0.5)$	- 60.0	- 30.5	- 19.7	- 5.9	2.0	11
$g_{\rho}^{2*} = 0.55 (0.5)$	- 59.8	- 30.4	- 19.6	- 5.78	2.0	11
$m_{\Lambda} = \frac{1195.8}{(1328.7)} \text{ MeV}$	- 80.7	- 44.6	- 28.8	- 12.0	1.82	14
$m_{\Lambda} = \frac{1461.6}{(1328.7)} \text{ MeV}$	- 46.2	- 21.5	- 14.0	- 2.35	2.1	6
$m_{\sigma} = \frac{495}{(550)} \text{ MeV}$	- 133	- 91	- 62	- 39.5	1.71	25
$m_{\sigma} = \frac{605}{(550)} \text{ MeV}$	-	-	-	-	-	-

Tabelle 2: Variation der Eingabedaten.

In den Klammern der ersten Spalte stehen die unveränderten Größen der Tabelle 1 bzw $m_{\Lambda} = 1329 \text{ MeV}$.

$$g_i^{2*} = \frac{g_i^2}{4\pi} \quad i = \pi, \sigma, \rho, \omega$$

Wir sind immer von den Kopplungskonstanten und Massen der Tabelle 1 und dem Formfaktor (3.49) mit $\Lambda = 1329$ MeV ausgegangen und haben jeweils eine dieser Größen um 10% vergrößert oder verkleinert. Für $\frac{g^2}{4\pi} = 5.4$ oder $m_\sigma = 605$ MeV divergiert die Hartree-Rechnung. Der ^{16}O -Kern ist nicht mehr gebunden. Am stärksten werden die Endergebnisse also durch eine Änderung der Masse oder der Kopplungskonstanten des σ -Mesons beeinflusst. Auffallend ist auch die Sensitivität der Bindungsenergie pro Nukleon auf die Eingabedaten, während die Einteilchenenergien und der mittlere, quadratische Radius weniger empfindlich auf eine Variation der Eingabedaten reagiert. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß für $\frac{g^2}{4\pi} = 11.0$ die Bindungsenergie pro Nukleon sogar positiv ist, obwohl die Einteilchenenergien vernünftige Werte liefern. Nach Gleichung (5.41) kann dies in der Hartree-Näherung durchaus passieren, obwohl dieser Fall natürlich unphysikalisch ist. Weiterhin sei noch auf die unterschiedliche Anzahl der Iteration hingewiesen, die das Hartree-Programm bei einer Änderung der Eingabedaten bis zur Konvergenz benötigte.

Als nächstes haben wir dann eine nichtrelativistische Hartree-Rechnung mit den Meson-Austauschpotentialen durchgeführt. Dazu haben wir in den Hartree-Potentialen (4.43) die kleine Komponente gestrichen. Die so entstehenden Potentiale wurden dann in die Schrödinger-Gleichung eingesetzt. Unter Verwendung der Kopplungskonstanten und Massen von Tabelle 1 und dem Formfaktor (3.49) mit $\Lambda = 1329$ MeV wie bei der relativistischen Rechnung erhielten wir folgende Resultate

Bindungsenergien:

$$E_{1s1/2}^B = - 627.77 \text{ MeV}$$

$$E_{1p3/2}^B = - 440.66 \text{ MeV}$$

$$E_{1p1/2}^B = - 440.66 \text{ MeV}$$

Bindungsenergie pro Nukleon:

$$E^B/A = - 136. \text{ MeV}$$

Mittlerer, quadratischer Radius:

$$r = 0.7 \text{ fm}$$

Dieses zunächst erstaunliche Ergebnis wird verständlich,

wenn wir von der DGL (5.16) für die relativistische Hartree-

Rechnung zum nichtrelativistischen Grenzfall übergehen. $-\frac{D'(\tau)}{2D(\tau)}$

und $\frac{3D''(\tau)}{4D'(\tau)}$ sind klein und können vernachlässigt werden.

$\frac{D'(\tau)}{D(\tau)} \frac{x}{r}$ ist für die l-s-Aufspaltung der relativistischen Rechnung verantwortlich. Also muß $D(r) \approx H(r)$ für den großen Unterschied zwischen der relativistischen und der nichtrelativistischen Rechnung verantwortlich sein. Unter Verwendung von $E = M + E^B$ ($E^B < 0$) ergibt sich

$$\begin{aligned} D(\tau) H(\tau) &= (M + E_{A_1} + W_{A_1}(\tau))(M - E_{A_1} + V_{A_1}(\tau)) = \\ &= (2M + E_{A_1}^B + W_{A_1}(\tau))(-E_{A_1}^B + V_{A_1}(\tau)) = \\ &= 2M \left[(V_{A_1}(\tau) - E_{A_1}^B) + \frac{W_{A_1}(\tau)}{2M} (V_{A_1}(\tau) - E_{A_1}^B) + \frac{E_{A_1}^B}{2M} (V_{A_1}(\tau) - E_{A_1}^B) \right] \end{aligned}$$

(5.42)

Man erkennt, daß der zweite und der dritte Summand in der eckigen Klammer von (5.42) relativistischen Ursprungs sind. Der dritte Summand ist klein. Da aber $W_{A1}(r)$ bis zu 700. MeV werden kann, ist der zweite Summand sehr groß. Er wirkt wie ein starkes, repulsives Potential. Dies macht den großen Unterschied zwischen der relativistischen und nichtrelativistischen Rechnung verständlich.

An dieser Stelle wollen wir noch bemerken, daß die Endergebnisse der Hartree-Rechnungen unabhängig von den Startwellenfunktionen sind. Dies haben wir getestet, indem wir einmal als Startwellenfunktionen "Woods-Saxon-Viererspinoren" für O^{16} verwendet haben. Ein anderes Mal haben wir z.B. die $1s_{1/2}$ -, $1p_{3/2}$ - und $1p_{1/2}$ - "Woods-Saxon-Viererspinoren" für Ca^{40} als Startwellenfunktionen verwendet. In beiden Fällen erhielten wir dieselben Lösungen der Hartree-Gleichungen.

Abschließend sei noch erwähnt, daß es möglich war, das komplizierte Programm zur numerischen Lösung der Hartree-Gleichungen (4.43) zu testen. Es gibt nämlich eine relativistische Hartree-Rechnung von L.D. Miller (Mil 72, Mil 72a). Er verwendete die Mesonen, Kopplungskonstanten und Massen von Tabelle 3.

Meson	T	J ^P	Masse (MeV)	Kopplungskonstante
ω	0	1 ⁻	782.8	$\frac{g_{\omega}^2}{4\pi} = 25$
ϵ	0	0 ⁺	782.8	$\frac{g_{\epsilon}^2}{4\pi} = 25$
σ	0	0 ⁺	277.4	$\frac{g_{\sigma}^2}{4\pi} = 0.675$
δ	1	1 ⁻	763.	$\frac{g_{\delta}^2}{4\pi} = 2.5$

Tabelle 3: Physikalische Eigenschaften der Mesonen, die L.D. Miller in seinem Modell der NN-Kraft verwendet hat.

Durch Vergleich mit Tabelle 1 erkennt man, daß hier nicht die experimentell bekannten Kopplungskonstanten verwendet wurden. Die Kopplungskonstanten in diesem Modell wurden angepasst, um möglichst gute Bindungsenergien pro Nukleon und mittlere quadratische Radien zu erhalten. Besonders auffallend ist die große Rolle, die das ϵ -Meson in diesem Modell spielt. Experimentell ist der Austausch von ϵ -Mesonen vernachlässigbar. In keinem Modell der N-N-Streuung ist das ϵ -Meson überhaupt zu finden. Bei Miller hat das ϵ -Meson die ungerechtfertigte Aufgabe, den großen, repulsiven Beitrag des ω -Mesons zum Hartree-Potential nahezu zu kompensieren. Es handelt sich hier also um ein phänomenologisches Modell. Miller erhielt für O^{16} folgende Ergebnisse:

Einteilchenenergien:

$$\begin{aligned} E_{1s1/2} &= - 44.12 \text{ MeV} \\ E_{1r3/2} &= - 23.96 \text{ MeV} \quad (5.43a) \\ E_{1p1/2} &= - 14.67 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Bindungsenergie pro Nukleon:

$$E^B_A = -7.35 \text{ MeV} \quad (5.43b)$$

Mittlerer, quadratischer Radius:

$$r = 2.70 \text{ fm} \quad (5.43c)$$

L.D. Miller hat die Hartree-Gleichungen mit Hilfe des Verfahrens von Runge-Kutta gelöst. In dieser Arbeit wurde die Methode von Nuomerov verwendet. Außerdem wurden auch die Integralfunktionen

$$Y(x) = Y(x_0) + \int_{x_0}^x y(f) df$$

mit verschiedenen Methoden gelöst. Trotzdem konnten die Ergebnisse (5.43) mit den Methoden, die in dieser Arbeit beschrieben worden sind, verifiziert werden. Dies spricht für die Richtigkeit beider numerischer Verfahren und der Computer-Programme. Außerdem sei hier erwähnt, daß das Modell von L.D. Miller noch zwei weitere große Nachteile enthält. Erstens: Die Retardierung wurde vernachlässigt, so daß es sich hier nicht um ein voll relativistisches Modell handelt. Zweitens: In dem Modell von Miller läßt sich keine Ableitungskopplung einbauen. Die Ableitungskopplung wird aber beim Fock-Term des π -Mesons sehr wichtig, so daß man mit dem Modell von Miller

keine realistischen Hartree-Fock-Rechnungen durchführen kann. In unserem Modell läßt sich aber die Ableitungskopplung in kanonischer Weise einfügen.

VI. Zusammenhang des Hartree-Modells von Kapitel IV mit Waleckas Theorie der stark kondensierten Materie

Im Rahmen seiner Theorie über stark kondensierte Materie hat J.D. Walecka ein feldtheoretisches Modell verwendet, daß dem Modell von Kapitel III sehr ähnlich ist. Die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen wird durch ein neutrales, skalares Meson und ein neutrales, vektorielles Teilchen vermittelt. J.D. Walecka identifiziert diese Mesonen jedoch nicht mit irgendwelchen experimentell bekannten Mesonen (z.B. σ -Mesonen bzw. ω -Mesonen), sondern sagt nur, daß man sich die Grundzüge der Nukleon-Nukleon-Streuung aus diesen beiden Mesonen aufgebaut denken kann. Die Massen und Kopplungskonstanten der beiden Mesonen paßt Walecka im Rahmen eines Hartree-Verfahrens für unendliche Materie (nuclear matter) so an, daß die richtige Bindungsenergie und Dichte für unendliche Materie reproduziert wird. Es ergab sich für die Kopplungskonstanten

$$G_s^2 = g_s^2 \frac{M^2}{\mu^2} = 266.9$$

$$G_v^2 = g_v^2 \frac{M^2}{m^2} = 195.7$$

ν ist die Nukleonenmasse. Identifiziert man nun das skalare Meson mit dem π -Meson und das vektorielle Meson mit dem ω -Meson und verwendet für diese Teilchen die Massen von Tabelle 1 ($m_\pi = 550$ MeV, $m_\omega = 782.8$), so ergibt sich für die Kopplungskonstanten dieser Teilchen

$$\frac{g_\pi^2}{4\pi} = 7.278 \quad (6.2)$$

$$\frac{g_\omega^2}{4\pi} = 10.838$$

Diese Kopplungskonstanten sind mit den Werten der Tabelle 1 verträglich. Es fragt sich nun, wie gut diese aus nuclear-matter-Rechnungen extrahierten Parameter auch endliche Kerne beschreiben können. Dazu wurden wieder für O^{16} mit den Kopplungskonstanten (6.2) Hartree-Rechnungen durchgeführt. Da Walecka keine Formfaktoren in seine Theorie eingeführt hat, haben auch wir bei den Hartree-Rechnungen keine Formfaktoren verwendet. Wir erhielten folgende Ergebnisse: Bindungsenergien:

$$\begin{aligned} E_{1s1/2}^B &= -42.625 \text{ MeV} \\ E_{1p3/2}^B &= -21.272 \text{ MeV} \\ E_{1p1/2}^B &= -13.504 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (6.3a)$$

Bindungsenergie pro Nukleon:

$$E^B/A = -3.8 \text{ MeV} \quad (6.3b)$$

Mittlerer, quadratischer Radius:

$$r = 2.36 \text{ fm} \quad (6.3c)$$

Diese Ergebnisse sind erstaunlich, denn es war keinesfalls zu erwarten, daß die aus den nuclear matter Rechnungen extrahierten Kopplungskonstanten auch für endliche Kerne vernünftige Ergebnisse liefern würden. Dies zeigt, daß die Kopplungskonstanten, die Walecka in seiner Theorie über stark kondensierter Materie verwendet hat, mit den Eigenschaften endlicher Kerne verträglich sind.

VII. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird der relativistische Hamilton-Operator für Atomkerne angegeben, deren Nukleonen durch den Austausch von Mesonen stark miteinander wechselwirken. Der relativistische Hamilton-Operator wird sowohl für punktförmige Nukleonen als auch für ausgedehnte Nukleonen angegeben. Das Verfahren zur Aufstellung des Hamilton-Operators im Rahmen der Feldtheorie ist so allgemein, daß man nach demselben Verfahren den relativistischen Hamilton-Operator für gebundene Fermionensysteme, die durch den Austausch von Bosonen miteinander wechselwirken, aufstellen kann.

Als nächstes wurden die Hartree- und Hartree-Fock-Gleichungen für Atomkerne mit abgeschlossenen Schalen angegeben. Dann wurden für O^{16} die Hartree-Gleichungen numerisch gelöst. Es wurden die experimentell bekannten Massen der Mesonen und die experimentell bekannten Meson-Nukleon-Kopplungskonstanten verwendet. Wir haben also keine phänomenologische Rechnung durchgeführt. Es stellte sich heraus, daß man mit den experimentell bekannten Massen und Kopplungskonstanten die erwarteten Einteilchenbindungsenergien, die Bindungsenergie pro Nukleon und den mittleren, quadratischen Radius für O^{16} ungefähr reproduzieren kann. Weiterhin zeigte sich, daß die relativistischen Effekte sehr groß sind. Dies beweist zum einen die große l-s-Aufspaltung zwischen dem $1p_{3/2}$ - und $1p_{1/2}$ -Niveau, die 10 MeV beträgt. Experimentell ist die l-s-Aufspaltung 5-10 MeV groß. Die l-s-Aufspaltung ist in unserem Modell ein rein relativistischer Effekt im Gegensatz zu den Modellen, die einen l-s-

Term phänomenologisch einführen und seine Stärke an die experimentellen Daten anpassen. Zum anderen ist auch die Bindungsenergie pro Nukleon von -5.8 MeV nur auf Grund starker relativistischer Effekte so groß. Nun könnte man einwenden, daß die relativistischen Effekte durch Berücksichtigung des Austauschterms wieder viel kleiner werden könnten. Dies ist aber unwahrscheinlich, da nämlich in diesem Fall die l-s-Aufspaltung auch viel kleiner werden würde, und die Hartree-Fock-Rechnungen könnten die experimentell bekannte l-s-Aufspaltung nicht reproduzieren. Ausschließen kann man dies im jetzigen Stadium natürlich nicht. Daß die relativistischen Effekte im Rahmen des Hartree-Modells wirklich sehr groß sind, konnte durch einen direkten Vergleich zwischen einer relativistischen und nichtrelativistischen Hartree-Rechnung gezeigt werden.

Um unser numerisches Verfahren und das Computer-Programm testen zu können, haben wir die Hartree-Rechnungen von L.D.Miller, die auf einem ganz anderen numerischen Verfahren basieren, nachgerechnet und konnten sie verifizieren. Ein Beweis für die Richtigkeit beider numerischer Verfahren und Programme!

Als weitere Anwendung unseres Programmes haben wir die Hartree-Rechnung für nuclear matter, die J.D.Walecka im Rahmen seines Modells für stark kondensierte Materie durchgeführt hat, auf endliche Kerne angewendet. Walecka hatte die Parameter seines Modells so angepaßt, daß es die experimentellen Werte für die Bindungsenergie und Dichte der Kernmaterie reproduzieren konnte. Mit diesen Parametern haben wir eine Hartree-Rechnung für O^{16} durchgeführt und bekamen erstaunlich gute Resultate für die

Bindungsenergien der Einteilchenzustände, die Bindungsenergie pro Nukleon und den mittleren, quadratischen Radius. Diese Ergebnisse waren deshalb so erstaunlich, weil es keinesfalls zu erwarten war, daß die aus den Kernmaterie Rechnungen extrahierten Kopplungskonstanten auch für endliche Kerne vernünftige Ergebnisse liefern würden.

Um Klarheit über die Größe der relativistischen Effekte bei der Bestimmung von Einteilchenenergien, Bindungsenergien pro Nukleon und den mittleren, quadratischen Radien zu erhalten, müssen die Hartree-Fock-Gleichungen gelöst werden. Wenn sich die großen, relativistischen Effekte, die wir bei den Hartree-Rechnungen fanden, auch bei den Hartree-Fock-Rechnungen bestätigen, dann hat dies sicherlich große Konsequenzen für die konventionellen, kernphysikalischen Rechnungen, da nahezu alle mikroskopischen Kernmodelle, auf dem Hartree-Fock-Verfahren basieren.

Anhang A: Notation

Vierervektor: $\{a^\mu\} = (a_0, \underline{a})$; $\{a_\mu\} = (a_0, -\underline{a})$

Skalarprodukt: $a \cdot b = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$

mit
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli-Matrizen:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dirac-Matrizen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \underline{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\sigma} \\ -\underline{\sigma} & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad ; \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_+ = 2 g^{\mu\nu}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\}_+ = 0$$

Kroneckersymbol: $\delta_{\nu\mu} = \delta^{\nu\mu} = g^{\nu\mu}$; $\delta_\nu{}^\mu = \delta^\nu{}_\mu = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu=\mu \\ 0 & \text{für } \nu \neq \mu \end{cases}$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Anhang B: Berechnung des retardierten Propagators der Klein-Gordon-Gleichung im Ortsraum

Der retardierte Propagator der Klein-Gordon-Gleichung ist folgendermaßen definiert

$$D_m^R(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ikx}}{m^2 - K^2 + i\eta K_0} d^4K \quad (B.1)$$

Nun ist

$$m^2 + \underline{K}^2 - K_0^2 + i\eta K_0 = (\sqrt{m^2 + \underline{K}^2} - (K_0 - \frac{i\eta}{2}))(\sqrt{m^2 + \underline{K}^2} + (K_0 - \frac{i\eta}{2})) \quad (B.2)$$

Der Integrand von (B.1) hat also Pole bei $K_0 = \frac{i\eta}{2} \pm \sqrt{m^2 + \underline{K}^2}$

Mit (B.2) erhalten wir für den Propagator

$$D_m^R(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ik_0 x_0} e^{-i\underline{K} \underline{x}}}{(\sqrt{m^2 + \underline{K}^2} + i\frac{\eta}{2} - K_0)(\sqrt{m^2 + \underline{K}^2} - i\frac{\eta}{2} + K_0)} d^4K \quad (B.3)$$

Zunächst führen wir das Integral über K_0 mit Hilfe des Residuensatzes aus.

a.) Es sei $x_0 > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} D_m^R(x) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int d^3K \left[\frac{-e^{i(\sqrt{m^2 + \underline{K}^2} + i\frac{\eta}{2})x_0}}{2\sqrt{m^2 + \underline{K}^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-i(\sqrt{m^2 + \underline{K}^2} - i\frac{\eta}{2})x_0}}{2\sqrt{m^2 + \underline{K}^2}} \right] e^{-i\underline{K} \underline{x}} = \\ &= \frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int d^3K \frac{-e^{i\sqrt{m^2 + \underline{K}^2} x_0} + e^{-i\sqrt{m^2 + \underline{K}^2} x_0}}{2\sqrt{m^2 + \underline{K}^2}} e^{-i\underline{K} \underline{x}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3K \frac{\sin(\sqrt{m^2 + \underline{K}^2} x_0)}{\sqrt{m^2 + \underline{K}^2}} e^{-i\underline{K} \underline{x}} \quad (B.4) \end{aligned}$$

b.) Es sei $x_0 \geq 0$. In diesem Fall gilt $D_n^R(x) = 0$

Allgemein gilt also

$$D_n^R(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\sin(\sqrt{n^2 + k^2} x_0)}{\sqrt{n^2 + k^2}} e^{-i \underline{k} \underline{x}} \Theta(x) \quad (B.5)$$

mit $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_0 > 0 \\ 0 & \text{für } x_0 < 0 \end{cases}$

Jetzt entwickeln wir $e^{-i \underline{k} \underline{x}}$ nach Kugelfunktionen und integrieren über die Winkel

$$D_n^R(x) = \frac{1}{2\pi^2 |\underline{x}|} \int \frac{\sin(\sqrt{k^2 + n^2} x_0)}{\sqrt{k^2 + n^2}} \sin(k |\underline{x}|) k dk \Theta(x) \quad (B.6)$$

Das Integral in (B.6) läßt sich ausführen (Gra 65)

$$D_n^R(x) = \frac{1}{2\pi^2 |\underline{x}|} \left[\pi |\underline{x}| \varepsilon(x) \delta(x_0^2 - |\underline{x}|^2) - \frac{\pi |\underline{x}|}{2} \Theta(x_0^2 - |\underline{x}|^2) \varepsilon(x) \frac{J_0(n \sqrt{x_0^2 - |\underline{x}|^2})}{\sqrt{x_0^2 - |\underline{x}|^2}} \right] \Theta(x) \quad (B.7)$$

$$\varepsilon(x) \equiv \varepsilon(x_0) \equiv \Theta(x) - \Theta(-x) \quad (B.8)$$

Faßt man noch geeignet zusammen, so ergibt sich schließlich

$$D_n^R(x) = \frac{1}{2\pi} \Theta(x) \delta(x_\mu x^\mu) - \frac{\pi}{4\pi} \Theta(x_\mu x^\mu) \Theta(x) \frac{J_0(n \sqrt{x_\mu x^\mu})}{\sqrt{x_\mu x^\mu}} \quad (B.9)$$

Anhang C: Zur Berechnung des Hamilton-Operators

Es soll in dem Hamilton-Operator (3.28)

$$\begin{aligned}
 H = & \int_{x_1^0 = t = \text{const}} \bar{\psi}(x_1) (-i \gamma \vec{\nabla}_1 + M) \psi(x_1) d^3x_1 \\
 & - g_V^2 \int_{x_1^0 = t = \text{const}} \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2) D_{m_V}^R(x_1 - x_2) \psi(x_2) \psi(x_1) d^3x_1 d^3x_2 \\
 & + g_V^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \int_{x_1^0 = t = \text{const}} \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2) D_{m_V}^R(x_1 - x_2) \gamma_5^{(2)} \psi(x_2) \gamma_5^{(1)} \psi(x_1) d^3x_1 d^3x_2 \\
 & + g_V^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \int_{x_1^0 = t = \text{const}} \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2) D_{m_V}^R(x_1 - x_2) \gamma^{(2)} \psi(x_2) \gamma^{(1)} \psi(x_1) d^3x_1 d^3x_2 \\
 & + g_V^2 \int_{x_1^0 = t = \text{const}} \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2) D_{m_V}^R(x_1 - x_2) \gamma^{(2)} \psi(x_2) \gamma^{(1)} \psi(x_1) d^3x_1 d^3x_2
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

die Integration über x_2^0 ausgeführt werden. Im folgenden wollen wir nur noch das σ -Meson explizit mitnehmen, da alle Überlegungen in diesem Anhang für die anderen Mesonen vollkommen analog sind. Als erstes setzen wir die Entwicklungen (3.29) und (3.30) in (C.1) ein

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{\alpha, \alpha'} \int_{x_1^0 = t = \text{const}} f_{\alpha'}^{\dagger}(x_1) (-i \gamma_0 \vec{\nabla}_1 + \gamma_0 M) f_{\alpha}(x_1) d^3x_1 b_{\alpha'}^{\dagger} b_{\alpha} \\
 & - g_V^2 \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta'} \int_{x_1^0 = t = \text{const}} f_{\beta'}^{\dagger}(x_2) f_{\alpha'}^{\dagger}(x_1) \gamma_0^{(2)} \gamma_0^{(1)} D_{m_V}^R(x_1 - x_2) \\
 & \quad \times f_{\alpha}(x_1) f_{\beta}(x_2) e^{i(E_{\beta'} - E_{\beta})x_1^0} e^{i(E_{\alpha'} - E_{\alpha})x_2^0} d^3x_1 d^3x_2
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned} \Psi_R(x_1) &:= \int f_{\mu'}^*(x_1) \gamma_0(z) D_{m_F}^R(x_1 - x_2) f_{\alpha}(x_2) e^{i(E_{\mu'} - E_{\alpha})x_1^0} d^4x_2 \\ &= \int D_{m_F}^R(x_1 - x_2) g(x_2) e^{i\omega x_1^0} d^4x_2 \end{aligned} \quad (C.3)$$

Hierbei ist $g(x_2) := f_{\mu'}^*(x_2) \gamma_0(z) f_{\alpha}(x_2)$ und $\omega := E_{\mu'} - E_{\alpha}$

Wir wollen annehmen, daß $\omega \neq m_F$ ist.

Jetzt setzen wir den Propagator (3.24) in (C.3) ein.

$$\begin{aligned} \Psi_R(x_1) &= \int \left[\frac{1}{2\pi} \theta(x_1^0 - x_2^0) \delta((x_1 - x_2)^2) - \frac{m_F}{4\pi} \theta(x_1^0 - x_2^0) \right. \\ &\quad \left. \times \theta((x_1 - x_2)^2) \frac{J_0(m_F \sqrt{(x_1 - x_2)^2})}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2}} \right] g(x_2) e^{i\omega x_1^0} d^4x_2 \end{aligned} \quad (C.4)$$

Mit den Variablen $\tau = x_1^0 - x_2^0$ und $R = x_1 - x_2$ erhält man

für das Integral in (C.4)

$$\begin{aligned} \Psi_R(x_1) &= \int_0^{\infty} d\tau \int (-) d^3R \left[\frac{1}{2\pi} \delta(\tau^2 - R^2) - \frac{m_F}{4\pi} \theta(\tau^2 - R^2) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{J_0(m_F \sqrt{\tau^2 - R^2})}{\sqrt{\tau^2 - R^2}} \right] g(x_1 - R) e^{i\omega(x_1^0 - \tau)} \end{aligned} \quad (C.5)$$

Mit der Beziehung $\delta(\tau^2 - R^2) = [\delta(\tau - R) + \delta(\tau + R)]/2R$

läßt sich der Integrand des Integrals in (C.5) umformen:

$$\begin{aligned} \Psi_R(x_1) &= - \int d^3R g(x_1 - R) \int_0^{\infty} d\tau \frac{1}{4\pi R} [\delta(\tau + R) + \delta(\tau - R)] e^{-i\omega\tau} e^{i\omega x_1^0} \\ &\quad - \int d^3R g(x_1 - R) \int_0^{\infty} d\tau (-) \frac{m_F}{4\pi} \frac{J_0(m_F \sqrt{\tau^2 - R^2})}{\sqrt{\tau^2 - R^2}} e^{-i\omega\tau} e^{i\omega x_1^0} \end{aligned} \quad (C.6)$$

Das Integral über $d\tau$ lässt sich ausführen (Gra 65)

$$\begin{aligned}\psi_R(x_1) &= - \int d^3R \, \varphi(\underline{x}_1 - \underline{R}) \frac{1}{4\pi R} e^{-i\omega R} e^{i\omega x_1^0} \\ &= - \int d^3R \, \varphi(\underline{x}_1 - \underline{R}) \frac{m_f}{4\pi} \left[-\frac{1}{m_f R} e^{-R\sqrt{m_f^2 - \omega^2}} + \frac{e^{-i\omega R}}{R m_f} \right] e^{i\omega x_1^0} \\ &= - \int d^3R \, \varphi(\underline{x}_1 - \underline{R}) \frac{1}{4\pi R} e^{-R\sqrt{m_f^2 - \omega^2}} e^{i\omega x_1^0}\end{aligned}\quad (C.7)$$

Setzen wir wieder die alten Variablen x_1 und x_2 ein, so ergibt sich schließlich:

$$\psi_R(x_1) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x_2 \, \varphi(\underline{x}_2) \frac{e^{-|\underline{x}_1 - \underline{x}_2| \sqrt{m_f^2 - (E_{d1} - E_{d2})^2}}}{|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|} e^{i(E_{d1} - E_{d2})x_1^0} \quad (C.8)$$

Nun kehren wir zum Hamilton-Operator zurück und erhalten mit (C.8)

$$\begin{aligned}H &= \sum_{\alpha, \alpha'} \int f_{\alpha'}^*(\underline{x}_1) (-i\gamma_0 \underline{\gamma} \cdot \vec{\nabla}_1 + \gamma_0 M) f_{\alpha}(\underline{x}_1) d^3x_1 b_{\alpha'}^{\dagger} b_{\alpha} \\ &= \frac{g_{\sigma}^2}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta'} \int f_{\beta'}^*(\underline{x}_1) f_{\alpha'}^*(\underline{x}_2) \gamma_0^{(1)} \gamma_0^{(2)} \frac{e^{-|\underline{x}_1 - \underline{x}_2| \sqrt{m_f^2 - (E_{d1} - E_{d2})^2}}}{|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|} \\ &\quad \times f_{\alpha}(\underline{x}_1) f_{\beta}(\underline{x}_2) d^3x_1 d^3x_2\end{aligned}\quad (C.9)$$

Anhang D: Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen
für den $\mathcal{S}$ -Mesonenfeldoperator im Falle aus-
gedehnter Nukleonen

Variert man die Lagrange-Dichte (3.33) nach $\vec{\chi}^\nu$ bzw
 $\partial_\mu \vec{\chi}^\nu$, so erhält man als Euler-Lagrange-Gleichung die
Proca-Gleichung mit einem Quellterm

$$\partial_\mu \vec{G}^{\mu\nu}(x) + m_\mathcal{S}^2 \vec{\chi}^\nu(x) = + g_\mathcal{S} \int \bar{\Psi}(x') \vec{\tau} \gamma^\nu \Psi(x') f_{\mathcal{N}\mathcal{N}\mathcal{S}}(x-x', 0) d^3x' \quad (\text{D.1})$$

Differenziert man diese Gleichung, so ergibt sich unter
Verwendung von $\partial_\nu \partial_\mu \vec{G}^{\mu\nu}(x) = 0$ ($\vec{G}^{\mu\nu}$ ist antisymmetrisch!)

$$m_\mathcal{S}^2 \partial_x^\nu \vec{\chi}_\nu(x) = + g_\mathcal{S} \int \bar{\Psi}(x') \vec{\tau} \gamma_\nu \Psi(x') \partial_x^\nu f_{\mathcal{N}\mathcal{N}\mathcal{S}}(x-x', 0) d^3x' \quad (\text{D.2})$$

Auf der rechten Seite von (D.2) integrieren wir partiell

$$\begin{aligned} m_\mathcal{S}^2 \partial_x^\nu \vec{\chi}_\nu(x) &= + g_\mathcal{S} \int \partial_{x'}^\nu (\bar{\Psi}(x') \vec{\tau} \gamma_\nu \Psi(x')) f_{\mathcal{N}\mathcal{N}\mathcal{S}}(x-x', 0) d^3x' \\ &- g_\mathcal{S} \int \bar{\Psi}(x') \vec{\tau} \gamma_\nu \Psi(x') f_{\mathcal{N}\mathcal{N}\mathcal{S}}(x-x', 0) d^3x' \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Wir wollen nun annehmen, daß der Formfaktor $f_{\mathcal{N}\mathcal{N}\mathcal{S}}(x-x', 0)$
für $|x'_0|$ bzw $|x'|$ gegen Unendlich Null ist. Dann ver-
schwindet der zweite Term der Gleichung (D.3). Für den Nu-
kleonenstrom gilt aber die Kontinuitätsgleichung (3.40)

$$\partial_\mu (\bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x)) = 0 \quad (\text{D.4})$$

Deshalb verschwindet auch der erste Term auf der rechten

Seite von (D.3). Es gilt also: $m_g^2 \partial^\nu \vec{\chi}_\nu(x) = 0$

Setzt man dies in die Gleichung (D.1) ein, so erhält man

$$[\square + m_g^2] \vec{\chi}_\nu(x) = +g_g \int \bar{\psi}(x') \vec{\tau} \gamma_\nu \psi(x') f_{NNg}(x-x'; 0) d^4x' \quad (D.5)$$

Anhang E: Zur Berechnung des Hamilton-Operators für
ausgedehnte Nukleonen

Nach (3.47) bis (3.49) hat der Hamilton-Operator für
ausgedehnte Nukleonen folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
 H = & \int \bar{\psi}(x_1) (-i \gamma \vec{\nabla}_1 + M) \psi(x_1) \delta(x_1^0 - t) d^4 x_1 \\
 & - g_r^2 \int \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x') D_{m_f}^R(x'' - x_2) \psi(x') \psi(x_1) F(x_2 - x') \times \\
 & \times F(x_1 - x'') \delta(x_1^0 - t) d^4 x' d^4 x'' d^4 x_2 d^4 x_1
 \end{aligned}
 \tag{E.1}$$

Da der Formfaktor im Impulsraum eine besonders einfache
Gestalt hat, transformieren wir die Nukleonenfeldopera-
toren und den Propagator in dem zweiten Term von (E.1)
ebenfalls in den Impulsraum. Wir nennen diesen Term I.

Dann ist

$$\begin{aligned}
 I = & - g_r^2 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i q_1 x_1} \bar{\psi}(q_1) e^{i q' x'} S(q') \frac{e^{i q(x'' - x_2)}}{m_f^2 - q^2} \times \\
 & \times e^{i k_1 x_1} \psi(k_1) e^{i x_2(x_2 - x')} \sqrt{\frac{\Lambda^2 - m_f^2}{\Lambda^2 - x_2^2}} e^{i x_1(x_1 - x'')} \sqrt{\frac{\Lambda^2 - m_f^2}{\Lambda^2 - x_1^2}} \times \\
 & \times e^{i x_1^0(x_1^0 - t)} d^4 x' d^4 x'' d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 q d^4 q' d^4 q d^4 k d^4 x_1 \times \\
 & \times d^4 x_1 d^4 x_1^0
 \end{aligned}
 \tag{E.2}$$

Jetzt integrieren wir über x' , x'' , x_1 und x_2

$$\begin{aligned}
 I = & -g_\sigma^2 \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int \delta^4(q' - x_2) \delta^4(q - x_1) \delta^3(q, -\underline{k}, -\underline{x}) \times \\
 & \times \delta(-q_0 + k_0 + x_0 + x_0) \delta^4(x_2 - q) \bar{\psi}(q_1) S(q') \frac{1}{m_f^2 - q^2} \times \\
 & \times \psi(k_1) \sqrt{\frac{\Lambda^2 - m_f^2}{\Lambda^2 - x_2^2}} \sqrt{\frac{\Lambda^2 - m_f^2}{\Lambda^2 - x_1^2}} e^{-i x_0 t} \times \\
 & \times d^4 q, d^4 q', d^4 q, d^4 k, d^4 x_2, d^4 x, d x^0
 \end{aligned} \quad (E.3)$$

Ausnutzung der Deltafunktionen liefert:

$$\begin{aligned}
 I = & -g_\sigma^2 \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int \bar{\psi}(k_1^0 + q^0 + x^0, \underline{k}, \underline{q}) S(q) \frac{1}{m_f^2 - q^2} \times \\
 & \times \psi(k_1) \frac{\Lambda^2 - m_f^2}{\Lambda^2 - q^2} e^{-i x_0 t} d^4 q d^4 k, d x^0
 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{1}{m_f^2 - q^2} \frac{\Lambda^2 - m_f^2}{\Lambda^2 - q^2} = \frac{1}{m_f^2 - q^2} - \frac{1}{\Lambda^2 - q^2} \quad (E.4)$$

Hiermit läßt sich das Integral (E.4) umformen

$$\begin{aligned}
 I = & -g_\sigma^2 \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int \bar{\psi}(k_1^0 + q^0 + x^0, \underline{k}, \underline{q}) S(q) \frac{1}{m_f^2 - q^2} \times \\
 & \times \psi(k_1) e^{-i x_0 t} d^4 q d^4 k, d x^0 \\
 & + g_\sigma^2 \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int \bar{\psi}(k_1^0 + q^0 + x^0, \underline{k}, \underline{q}) S(q) \frac{1}{\Lambda^2 - q^2} \times \\
 & \times \psi(k_1) e^{-i x_0 t} d^4 q d^4 k, d x^0
 \end{aligned} \quad (E.5)$$

Da die beiden Integrale in (E.5) von gleicher Gestalt sind, betrachten wir zunächst nur den 1. Term auf der rechten Seite von (E.5) und nennen ihn I_1 . In diesem Term wollen wir wieder den Propagator und die Nukleon-feldoperatoren in den Ortsraum transformieren

$$\begin{aligned} I_1 &= -g_r^2 \frac{1}{(2\pi)^{4/2}} \int e^{-i(\underline{k}_1 + \underline{q})\underline{x}_1} e^{i(\underline{k}_1^0 + \underline{q}^0 + \underline{x}^0)\underline{x}_1^0} \bar{\psi}(\underline{x}_1) \times \\ &\quad \times e^{-i\underline{q}\underline{x}_2} \bar{\psi}(\underline{x}_2) \psi(\underline{x}_2) e^{-i\underline{q}\underline{x}'} D_{m_f}^R(\underline{x}') e^{-i\underline{k}_1 \underline{x}^0} \psi(\underline{x}^0) \times \\ &\quad \times e^{-i\underline{x}^0 t} d^4 q d^4 k_1 d^4 x^0 d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x' d^4 x^0 = \\ &= -g_r^2 \int \delta^4(\underline{x}_1 - \underline{x}_2 - \underline{x}') \delta^4(\underline{x}_1 - \underline{x}^0) \delta(\underline{x}_1^0 - t) \times \\ &\quad \times \bar{\psi}(\underline{x}_1) \bar{\psi}(\underline{x}_2) D_{m_f}^R(\underline{x}') \psi(\underline{x}_2) \psi(\underline{x}^0) d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x' d^4 x^0 = \\ &= -g_r^2 \int \bar{\psi}(\underline{x}_1) \bar{\psi}(\underline{x}_2) D_{m_f}^R(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \psi(\underline{x}_2) \psi(\underline{x}_1) d^3 x_1 d^4 x_2 \\ &\quad \underline{x}_1^0 = t = \text{const} \end{aligned} \quad (E.6)$$

Mit (E.6) erhalten wir für I

$$\begin{aligned} I &= -g_r^2 \int \bar{\psi}(\underline{x}_1) \bar{\psi}(\underline{x}_2) D_{m_f}^R(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \psi(\underline{x}_2) \psi(\underline{x}_1) d^3 x_1 d^4 x_2 \\ &\quad \underline{x}_1^0 = t = \text{const} \\ &\quad + g_r^2 \int \bar{\psi}(\underline{x}_1) \bar{\psi}(\underline{x}_2) D_{\lambda}^R(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \psi(\underline{x}_2) \psi(\underline{x}_1) d^3 x_1 d^4 x_2 \\ &\quad \underline{x}_1^0 = t = \text{const} \end{aligned} \quad (E.7)$$

Mit (E.7) ergibt sich schließlich für den Hamilton-

Operator ausgedehnter Nukleonen (E.1)

$$\begin{aligned} H &= \int \bar{\psi}(\underline{x}_1) (-i \underline{\gamma} \underline{\vec{p}}_1 + M) \psi(\underline{x}_1) d^3 x_1 \\ &\quad \underline{x}_1^0 = t = \text{const} \\ &\quad - g_r^2 \int \bar{\psi}(\underline{x}_1) \bar{\psi}(\underline{x}_2) D_{m_f}^R(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \psi(\underline{x}_2) \psi(\underline{x}_1) d^3 x_1 d^4 x_2 \\ &\quad \underline{x}_1^0 = t = \text{const} \\ &\quad + g_r^2 \int \bar{\psi}(\underline{x}_1) \bar{\psi}(\underline{x}_2) D_{\lambda}^R(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \psi(\underline{x}_2) \psi(\underline{x}_1) d^3 x_1 d^4 x_2 \\ &\quad \underline{x}_1^0 = t = \text{const} \end{aligned} \quad (E.8)$$

Anhang F: Berechnung des Erwartungswertes der kinetischen Energie

Für den Erwartungswert der kinetischen Energie gilt

$$\langle T \rangle = \sum_{\alpha=1}^R \int f_{\alpha}^*(x) (-i \gamma^0 \gamma^i \nabla_i \gamma^0 M) f_{\alpha}(x) d^3x \quad (F.1)$$

Setzt man die Darstellung der γ -Matrizen von Anhang A und die explizite Gestalt der Viererspinoren (4.3) in (F.1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle T \rangle = & \sum_{\gamma, e_1, \mu} \int d^3x \left\{ \frac{-i G_{\gamma e_2}(\gamma)}{\gamma} \psi_{e_1 \mu}^*(\vec{x}) \right. \\ & \times \left[M \frac{i G_{\gamma e_2}(\gamma)}{\gamma} \psi_{e_1 \mu}(\vec{x}) + \underline{e} \cdot \underline{p} \frac{F_{\gamma e_2}(\gamma)}{\gamma} \underline{e} \cdot \vec{x} \psi_{e_1 \mu}(\vec{x}) \right. \\ & + \int d^3x' \frac{F_{\gamma e_2}(\gamma)}{\gamma} \underline{e} \cdot \vec{x}' \psi_{e_1 \mu}(\vec{x}') \\ & \left. \left. \times \left[\underline{e} \cdot \underline{p} \frac{i G_{\gamma e_2}(\gamma)}{\gamma} \psi_{e_1 \mu}(\vec{x}) - M \frac{F_{\gamma e_2}(\gamma)}{\gamma} \underline{e} \cdot \vec{x} \psi_{e_1 \mu}(\vec{x}) \right] \right\} \right. \\ & \times \langle W_{\gamma, \mu} / W_{\gamma, \mu} \rangle \quad (F.2) \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \underline{e} \cdot \underline{p} \frac{G_{\gamma e_2}(\gamma)}{\gamma} \psi_{e_1 \mu}(\vec{x}) &= \frac{\underline{e} \cdot \underline{x}}{\gamma^2} (\underline{e} \cdot \underline{x} \underline{e} \cdot \underline{p}) \frac{G_{\gamma e_2}(\gamma)}{\gamma} \psi_{e_1 \mu}(\vec{x}) = \\ &= \frac{\underline{e} \cdot \underline{x}}{\gamma^2} \left(-i \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + i \underline{e} \cdot \underline{L} \right) \frac{G_{\gamma e_2}(\gamma)}{\gamma} \psi_{e_1 \mu}(\vec{x}) = \\ &= \left[-i \frac{d}{d\gamma} \frac{G_{\gamma e_2}(\gamma)}{\gamma} - i(1+\chi) \frac{G_{\gamma e_2}(\gamma)}{\gamma^2} \right] \frac{\underline{e} \cdot \underline{x}}{\gamma} \psi_{e_1 \mu}(\vec{x}) \quad (F.3) \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet

$$\underline{L} \cdot \underline{\sigma} \psi_{\ell j m}(\vec{r}) = (j^2 - \ell^2 - \frac{1}{4}) \psi_{\ell j m}(\vec{r}) = - (1+x) \psi_{\ell j m}(\vec{r}) \quad (\text{F.4})$$

mit

$$x = \begin{cases} -(1+x) = -(j+\frac{1}{2}) & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2} \\ \ell = +(j+\frac{1}{2}) & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{F.4a})$$

Mit der Relation (F.3) erhalten wir für den Erwartungswert (F.2)

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \sum_{\ell j m \mu} \left\{ \int d^3r \frac{-i G_{\ell j}(\vec{r})}{r} \psi_{\ell j m}^*(\vec{r}) \right. \\ &\quad \times \left(M \frac{i G_{\ell j}(\vec{r})}{r} \psi_{\ell j m}(\vec{r}) + \left[-i \frac{\partial}{\partial r} \frac{F_{\ell j}(\vec{r})}{r} - i \frac{(1-x)}{r} \frac{F_{\ell j}(\vec{r})}{r} \right] \psi_{\ell j m}(\vec{r}) \right) \\ &\quad + \int d^3r \frac{F_{\ell j}(\vec{r})}{r} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} \psi_{\ell j m}^*(\vec{r}) \\ &\quad \times \left(\left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{G_{\ell j}(\vec{r})}{r} + \frac{1+x}{r} \frac{G_{\ell j}(\vec{r})}{r} \right] \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} \psi_{\ell j m}(\vec{r}) - M \frac{F_{\ell j}(\vec{r})}{r} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} \psi_{\ell j m}(\vec{r}) \right) \Big\} \\ &\quad \times \delta_{\mu\mu} \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Das zweite Integral in (F.5) läßt sich mit der Relation (Mes.65)

$$\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} \psi_{\ell j m}(\vec{r}) = - \psi_{\lambda j m}(\vec{r}) \quad \lambda = \ell \pm 1 \text{ für } j = \ell \pm \frac{1}{2}$$

vereinfachen. Durch Integration über den Raumwinkel von $\vec{r}$ und geeignetes Zusammenfassen ergibt sich schließlich für den Erwartungswert der kinetischen Energie

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \sum_{\ell j} 2 \cdot j^2 \int d^3r \left\{ G_{\ell j}(\vec{r}) \left[M G_{\ell j}(\vec{r}) - \frac{d}{dr} F_{\ell j}(\vec{r}) + \frac{x}{r} F_{\ell j}(\vec{r}) \right] \right. \\ &\quad \left. + F_{\ell j}(\vec{r}) \left[\frac{d}{dr} G_{\ell j}(\vec{r}) + \frac{x}{r} G_{\ell j}(\vec{r}) - M F_{\ell j}(\vec{r}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Anhang G: Zur Berechnung des Erwartungswertes des
S-Mesonen-Austauschpotentials

Mit Hilfe der Rechenregeln für sphärische Tensoroperatoren

(de Sha 63) erhält man

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{V}_S^D \rangle &= -3 m_S \frac{g_S^2}{4\pi} \sum_{n_1, \ell_1, j_1, m_1, \mu_1} \sum_{n_2, \ell_2, j_2, m_2, \mu_2} \sum_{j, M, \ell, r} \\
 &\times (-)^{j_1+j_2+j+r+\ell+\ell_1+\ell_2} \hat{j}^{\dagger} \hat{j}_1^{\dagger} \hat{j}_1^{\dagger} \hat{r}^{\dagger} \hat{\ell}^{\dagger} \hat{\ell}_1^{\dagger} \hat{\ell}_2^{\dagger} \hat{\lambda}_1^{\dagger} \hat{\lambda}_2^{\dagger} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ n_1 & n_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ n_1 & n_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\
 &\times \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & r \\ j_1 & j_2 & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ \lambda_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ \ell & 1 & r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ \lambda_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ \ell & 1 & r \end{Bmatrix} [2+2(-)^{\ell+r}] \times \\
 &\times \langle W_{\mu_1, \mu_2} W_{\mu_1, \mu_2} | \vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2 | W_{\mu_1, \mu_2} W_{\mu_1, \mu_2} \rangle
 \end{aligned}$$

(G.1)

Zunächst summieren wir über m_2 und M

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{V}_S^D \rangle &= -3 m_S \frac{g_S^2}{4\pi} \sum_{n_1, \ell_1, j_1, m_1, \mu_1} \sum_{n_2, \ell_2, j_2, m_2, \mu_2} \sum_{j, \ell, r} \\
 &\times (-)^{j_1+j_2+j+r+\ell+\ell_1+\ell_2} \hat{j}^{\dagger} \hat{j}_1^{\dagger} \hat{j}_1^{\dagger} \hat{r}^{\dagger} \hat{\ell}^{\dagger} \hat{\ell}_1^{\dagger} \hat{\ell}_2^{\dagger} \hat{\lambda}_1^{\dagger} \hat{\lambda}_2^{\dagger} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & r \\ j_1 & j_2 & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ \lambda_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ \ell & 1 & r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ \lambda_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ \ell & 1 & r \end{Bmatrix} \times \\
 &\times [2+2(-)^{\ell+r}] \langle W_{\mu_1, \mu_2} W_{\mu_1, \mu_2} | \vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2 | W_{\mu_1, \mu_2} W_{\mu_1, \mu_2} \rangle
 \end{aligned}$$

(G.2)

Mit der Formel (de Sha 62)

$$\sum_j (-1)^{j_1+j_2+j} \hat{j}^2 \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_1 & j' \\ j_2 & j_2 & j \end{matrix} \right\} = \hat{j}_1 \hat{j}_2 \delta(j, 0) \quad (G.3)$$

ergibt sich für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} \langle \bar{V}_S^D \rangle &= -3m_S \frac{g_S^2}{4\pi} \sum_{n_1, l_1, j_1, m_1, \mu_1} \sum_{n_2, l_2, j_2, \mu_2} \sum_c \\ &\times (-1)^{l_1+l_2+l_3} \hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{j}_3 \hat{l}_1 \hat{l}_2 \hat{l}_3 \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \times \\ &\times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} l_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ \lambda_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ c & 1 & 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ \lambda_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ c & 1 & 0 \end{matrix} \right\} \times \\ &\times [2+2(-1)^c] \langle w_{\mu_1 \mu_2} w_{\mu_3 \mu_4} | \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 | w_{\mu_1 \mu_2} w_{\mu_3 \mu_4} \rangle = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (G.4)$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da aus den jj -
Symbolen $1 = 1$ folgt und dann $[2+2(-1)^c] = 0$ ist.

Literaturverzeichnis

- Ahra 65 -M.Abramowitz, I.A.Segun, Handbook of
Mathematical Functions, Dover Publications,
New York (1965)
- Be 70 -R.L.Becker, Phys. Letters 32B, 263 (1970)
- Bj 67 -J.D.Bjorken, S.D.Drell, Relativistische
Quantenfeldtheorie, B.I., Mannheim (1967)
- Bj 66 -J.D.Bjorken, S.D.Drell, Relativistische
Quantenmechanik, B.I., Mannheim (1966)
- Bl 67 -J.M.Blatt, Journal of Computational Physics
1, 382 (1967)
- Bor 59 -N.N.Boroliubov, D.V.Shirkov, Introduction
to the Theory of Quantized Fields, Interscience
Publishers, New York (1959)
- Bon 74 -K.Bongardt, H.Pilkuhn, H.G.Schaille, Phys.Lett.
52B, 271 (1974)
- Bro 71 -G.E.Brown, A.D.Jackson, The Nucleon-Nucleon-
Interaction, Nordita (1971)
- Bro 76 -R.Brockmann, M.Dillig, to be published in Phys.
Rev.C
- de Sha 63 -A.de-Shalit, I.Talmi, Nuclear Shell Theory,
Academic Press, New York (1963)
- Ede 65 -G.Eder, Kernkräfte, Verlag G.Braun, Karlsruhe
(1965)
- Erk 74 -K.Erkelenz, Phys. Reports 13C, 191 (1974)
- Fur 51 -W.H. Furry, Phys. Rev., 81, 115 (1951)
- Gra 65 -I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of Inte-
grals, Series and Products, Academic Press,
New York (1965)

- Gra 70 -I.P.Grant, Advances in Physics, 19, 747 (1970)
- Hol 76 -K.Holinde, preprint
- Jac 76 -A.D.Jackson, D.O.Riska, B.Verwest, Nucl.Phys.
A 249, 397 (1975)
- Lan 67 -Landolt-Börnstein, Gruppe I: Kernphysik und
Kerntechnik, Band 2: Kernradien, Springer-
Verlag, Berlin (1967)
- Leh 55 -H.Lehmann, K. Symanzik, W.Zimmermann, Nuovo
Cimento, 1, 1425 (1955)
- Mes 67 -A.Messiah, Quantum Mechanics, North-Holland,
Amsterdam (1967)
- Mil 72 -L.D.Miller, A.E.S. Green, Phys.Rev.C, Volume 5,
Number 1, 241 (1972)
- Mil 72a -L.D.Miller, Phys.Rev.Let., 28, 1281 (1972)
- Par 76 -Particle Data Group, Rev.of Mod. Phys., 48, No.2,
Part II
- Rom 69 -P.Roman, Introduction to Quantum Field Theory,
John Wiley (1969)
- Rom 65 -P.Roman, Advanced Quantum Theory, Addison-
Wesley, Reading Mass. (1965)
- Schw 70 -J.Schwinger, Particles, Sources and Fields,
Addison-Wesley, Reading Mass. (1970)
- Schw 53 -J.Schwinger, Phys.Rev., 91, 713 (1953)
- Sny 40 -H.S.Snyder, J.Weinberg, Phys.Rev., 57, 307
(1940)
- Ue 69 -T.Ueda, A.E.S.Green, Nucl.Phys., B10, 289 (1969)
- Ue 68 -T.Ueda, A.E.S.Green, Phys.Rev., 174, 1304 (1968)

- Ver 74 -B.Verwest, D.O.Riska, Phys.Lett., 48B, 18 (1974)
- Wal 74 -J.D.Walecka, Ann. of Phys. 83, 491 (1974)
- Wi 63 -A.S.Wightman "Recent Achievements of Axiomatic
Field Theory", Proceedings of the Summer Seminar
of IAEA, Trieste, 1962, veröffentlicht als Buch,
Theoretical Physics, IAEA, Vienna, 1963.
- Yu 35 -H.Yukawa, Proc.Phys.Math.Soc. Japan, 17, 48
(1935)
- Zur 65 -R.Zurmühl, Praktische Mathematik, Springer-
Verlag, Berlin (1965)

Herrn Prof. Dr. M.G. Huber danke ich für die hilfreiche Unterstützung bei dieser Arbeit und sein reges Interesse an ihrem Fortgang.

Besonderen Dank schulde ich auch Herrn Prof. Dr. W. Weise, sowie den Herren Dr. habil. H.M. Hofmann und Dr. M. Dillig, die mir in zahlreichen Gesprächen halfen, auftretende Schwierigkeiten zu beseitigen.

Weiterhin danke ich dem Rechenzentrum der Universität Erlangen-Nürnberg für die sorgfältig angefertigten Plotterzeichnungen.

L e b e n s l a u f

Rolf Brockmann

geb.: 12. April 1946 in Bonn

Eltern: Friedrich Brockmann und
Helene Brockmann, geb. Farkas

Familienstand: verheiratet, zwei Kinder

Schulen: 1952 - 1957 Volksschule in Lüdenscheid
1957 - 1963 Helmholtz-Gymnasium in Bielefeld
1963 - 1966 Hans-Sachs-Gymnasium in Nürnberg

Studium: 1966 - 1972 Friedrich-Alexander-Universität
in Erlangen

Prüfungen: 3. November 1969 Diplom-Vorsprüfung in Physik
30. Juni 1972 Diplom-Hauptprüfung in Physik

Stellungen: 16.7.1972 - 30.9.1972 wissenschaftliche Hilfs-
kraft am Institut für Theoretische Physik III
der Universität Erlangen
1.10.1972 - 31.10.1976 wissenschaftlicher Ange-
stellter am Institut für Theoretische Physik III
der Universität Erlangen
seit 1.11.1976 Verwalter der Dienstgeschäfte
eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut
für Theoretische Physik der Universität Regensburg

Erlangen, 30. 11. 1976

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990